

OVERSTAPDEEL

WISKUNDE

12^e EDITIE

4 VMBO naar
HAVO/MBO

FLEX

& GETAL & RUIMTE



Noordhoff

Dit boek is van jou:

NAAM

KLAS

Getal & Ruimte

Overstapdeel

4 VMBO naar

4 HAVO/MBO-techniek

Twaalfde editie, 2021

Noordhoff
Groningen

Auteurs

C. J. Admiraal
J. H. Dijkhuis
J. A. Verbeek
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. H. M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M. L. M. van Maarseveen
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse
M. Vos
B. W. van Laarhoven

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het overstapdeel

Het overstapdeel 4 VMBO naar 4 HAVO/MBO-techniek is bestemd voor leerlingen die na het vmbo hun opleiding vervolgen in havo 4, of een technische opleiding gaan doen op het mbo.

Voor leerlingen die naar havo 4 gaan, is onderscheid gemaakt tussen leerlingen die wiskunde A gaan volgen en degenen die wiskunde B gaan volgen.

doelgroep	hoofdstukken
havo wiskunde A	1, 2, 3
havo wiskunde B	2 tot en met 9
mbo-techniek	2, 3, 4, 6, 8, 10

Bij de hoofdstukken die niet voor alle drie de doelgroepen zijn bedoeld, staat dit ook aan het begin van het hoofdstuk duidelijk aangegeven.

De hoofdstukken en de daarin opgenomen leerstof is zo opgebouwd, dat de hoofdstukken in de aangegeven volgorde moeten worden doorgewerkt.

Hieronder is aangegeven met hoeveel uren studielast bij de drie doelgroepen rekening moet worden gehouden bij het doornemen van de hoofdstukken.

- Voor havo wiskunde A $4 + 7 + 3 = 14$ klokuren.
- Voor havo wiskunde B $7 + 3 + 2 + 2 + 4 + 3 + 2 + 3 = 26$ klokuren.
- Voor mbo-techniek $7 + 3 + 2 + 4 + 2 + 2 = 20$ klokuren.

Zelfstandig doorwerken of onder begeleiding

Het boek kan in principe zelfstandig door de leerlingen worden doorgewerkt.

Daartoe zijn veel voorbeelden opgenomen en is bij de opgaven een voorzichtige opbouw gekozen. Bovendien zijn achter in het boek van alle opgaven de uitwerkingen opgenomen.

Verder is gebruikgemaakt van de mogelijkheden die het flexboek biedt. Zo zijn er na enkele voorbeelden invulopgaven opgenomen waarin de leerlingen precies de uitwerking van het voorbeeld kunnen volgen.

De ervaring leert dat het voor veel leerlingen lastig is om de hoofdstukken geheel zelfstandig door te nemen. Het is dan ook verstandig voor enige begeleiding te zorgen.

Opmerkingen van gebruikers stellen wij zeer op prijs.

Voorjaar 2021

Inhoud

1 [HAVO-A] Procenten 4

2 Algebra deel 1 14

- 2.1 Herleiden 14
- 2.2 Haakjes wegwerken 19
- 2.3 Letterrekenen met breuken 23
- 2.4 Machten 29

3 Lineaire vergelijkingen en formules 35

- 3.1 Lineaire vergelijkingen 35
- 3.2 Lineaire formules 37
- 3.3 Formules opstellen en vergelijken 40

4 [HAVO-B / MBO] Lineaire functies 43

5 [HAVO-B] Lineaire vormen 48

- 5.1 Formules opstellen 48
- 5.2 Lineaire ongelijkheden 50

6 [HAVO-B / MBO] Algebra deel 2 53

- 6.1 Wortels 53
- 6.2 Merkwaardige producten 58
- 6.3 Ontbinden in factoren 60

7 [HAVO-B] Kwadratische vergelijkingen 64

- 7.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen 64
- 7.2 De abc -formule 67

8 [HAVO-B / MBO] Kwadratische functies 70

9 [HAVO-B] Kwadratische vormen 73

- 9.1 Snijpunten met de x -as en de y -as 73
- 9.2 De parabool $y = a(x - d)(x - e)$ 74
- 9.3 Parabolen verschuiven 77

10 [MBO] Ruimte meetkunde 81

- 10.1 Pythagoras en doorsnede 81
- 10.2 Berekeningen in de ruimte 83
- 10.3 Coördinaten in de ruimte 87

Uitwerkingen 89

- 1 Procenten 90
- 2 Algebra deel 1 95
- 3 Lineaire vergelijkingen en formules 101
- 4 Lineaire functies 107
- 5 Lineaire vormen 110
- 6 Algebra deel 2 113
- 7 Kwadratische vergelijkingen 117
- 8 Kwadratische functies 123
- 9 Kwadratische vormen 125
- 10 Ruimte meetkunde 130

Trefwoordenregister 134

Verantwoording 137

1 [HAVO-A] Procenten

Tot nu toe heb je bij het berekenen van procenten gebruikgemaakt van een procententabel. Op de havo worden procentenberekeningen anders gedaan. In dit hoofdstuk leer je die manier.

Theorie A De vermenigvuldigingsfactor

52% van een getal is $\frac{52}{100}$ deel van dat getal.

Je kunt in plaats van $\frac{52}{100}$ ook schrijven 0,52.

Om te berekenen hoeveel 52% van 420 is, bereken je dus $\frac{52}{100} \times 420 = 0,52 \times 420$.

We noemen 0,52 de **vermenigvuldigingsfactor**. Je kunt de vermenigvuldigingsfactor gebruiken om procentberekeningen te maken.

Bij 31% van 2348,6 krijg je $0,31 \times 2348,6 = 728,066$.

Afgerond op één decimaal krijg je 728,1.

We schrijven $0,31 \times 2348,6 \approx 728,1$.

Met \approx laat je zien dat er is afgerond.

Je spreekt \approx uit als *is ongeveer gelijk aan*.

Voorbeeld

a Bereken 32% van 698,6. Rond af op één decimaal.

b Bereken 268% van €456,92.

Uitwerking

a $0,32 \times 698,6 \approx 223,6$

b $2,68 \times 456,92 \approx €1224,55$

1 Vul in. Rond af op één decimaal.

a 49% van 369,5 is \times \approx

b 121% van 89,23 is \times \approx

c 34% van 921 is \times \approx

2 Bereken.

a 89% van €59,92

b 143% van €89,98

c 0,45% van €598,20

d 0,5% van €2346,99

Theorie B Toename en afname met de vermenigvuldigingsfactor

Neemt een prijs met 12% toe, dan krijg je $\underbrace{100\%}_{\text{oude prijs}} + \underbrace{12\%}_{\text{toename}} = \underbrace{112\%}_{\text{nieuwe prijs}}$, dus $\times 1,12$.

De nieuwe prijs kun je berekenen met $\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD}$.

Het getal 1,12 heet de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele toename van 12%.

En zo is bij een procentuele toename van 8,7%, de vermenigvuldigingsfactor 1,087.

Neemt een hoeveelheid met 16% af, dan houd je $100\% - 16\% = 84\%$ over, dus $\times 0,84$.

De nieuwe hoeveelheid bereken je met $\text{NIEUW} = 0,84 \times \text{OUD}$.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid van 325 neemt met 8% toe.
Hoeveel krijg je?
- b Op een horloge van € 134,95 krijg je 7,5% korting.
Bereken de nieuwe prijs.

Uitwerking

a Je krijgt $1,08 \times 325 = 351$.

$100\% + 8\% = 108\%$, dus $\times 1,08$

b De nieuwe prijs is $0,925 \times 134,95 \approx \text{€ } 124,83$.

$100\% - 7,5\% = 92,5\%$, dus $\times 0,925$

3 Vul in.

- a Bij een toename van 5,8% hoort de vermenigvuldigingsfactor
- b Bij een afname van 12,5% hoort de vermenigvuldigingsfactor
- c Bij een toename van een hoeveelheid van 750 met 12%
krijg je \times =
- d Bij een afname van een hoeveelheid van 550 met 16%
krijg je \times =

- 4 Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een procentuele
- | | | |
|------------------|----------------------|---------------------|
| a toename van 6% | c afname van 1,25% | e toename van 0,35% |
| b afname van 65% | d toename van 120,1% | f afname van 10,5% |

- 5 De prijs van een fototoestel van €385,95 wordt verlaagd met 13,5%.
Bereken de nieuwe prijs.

- 6 Martijn koopt een huis van €249 500. Een jaar later is de waarde van het huis met 11,5% gestegen.
Hoeveel is het huis een jaar na de aankoop waard?

Door elkaar

- 7 a Hoeveel is 5,9% van 50?
b Op een ring van €29,95 krijg je 7,9% korting.
Bereken de nieuwe prijs.
c Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een toename van 4,7%.
d Een hoeveelheid van 1600 neemt met 3,5% af.
Hoeveel houdt je over?

Theorie C Percentage berekenen

In een klas van 27 leerlingen hebben 24 leerlingen een voldoende gehaald voor het proefwerk wiskunde.

24 van de 27 is $\frac{24}{27} \times 100\% \approx 88,9\%$.

Dus 88,9% van de leerlingen heeft een voldoende gehaald.

Afspraak: Percentages rond je af op één decimaal.

Voorbeeld

- a Hoeveel procent is 45 van 679? b Hoeveel procent is 5371 van 7212?

Uitwerking

a $\frac{45}{679} \times 100\% \approx 6,6\%$

b $\frac{5371}{7212} \times 100\% \approx 74,5\%$

- 8 Vul in.
- a 5 van 25 is $\frac{5}{25} \times 100\% = \dots\dots\dots\%$.
- b 821 van 5390 is $\frac{\dots\dots\dots}{5390} \times 100\% \approx \dots\dots\dots\%$.

- 9** Hoeveel procent is
- a** 0,3 van 2
 - b** 4,9 van 34,3
 - c** 1 van 9,3
 - d** 5,42 van 89,23
- 10** Bij een voetbalwedstrijd zitten 1238 mannen en 324 vrouwen op de tribune.
- a** Hoeveel publiek zit er in totaal op de tribune?
 - b** Hoeveel procent van het publiek is vrouw?

Let op het verschil

Hoeveel is 28% van 390?
 28% van 390 is $0,28 \times 390 = 109,2$.

Hoeveel procent is 28 van 390?
 28 van 390 is $\frac{28}{390} \times 100\% \approx 7,2\%$.

- 11**
- a** Hoeveel procent is 97 van 218?
 - b** Hoeveel is 43% van 18 500?
 - c** Hoeveel is 0,3% van € 692,55?
- 12**
- a** Hoeveel is 245% van 295?
 - b** Hoeveel procent is € 234,98 van € 975,39?
 - c** Hoeveel is 2,9% van € 21 653?
- 13** In klas M4a zitten 28 leerlingen. Er komen 18 leerlingen op de fiets naar school, 3 met de bus en 5 met de trein. De rest komt lopend.
- a** Hoeveel procent komt met de fiets naar school?
 - b** Hoeveel procent komt met het openbaar vervoer?

Door elkaar

- 14**
- a** Een bedrag van € 296 neemt met 41% toe.
Hoeveel is het bedrag nu?
 - b** Hoeveel procent is 45 van de 1269?
 - c** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een afname van 21,3%.
 - d** In klas 4B dragen 6 van de 27 leerlingen een bril.
Hoeveel procent is dat?
 - e** Bereken 62% van € 829,45.
 - f** Een huis van € 267 500 is 6,2% in waarde gestegen.
Hoeveel is het huis waard?
 - g** Een webshop had 1240 artikelen in het assortiment. Dit aantal wordt met 25% uitgebreid.
Hoeveel artikelen heeft de webshop nu in het assortiment?

Theorie D Procentuele verandering berekenen

Op een school zitten 1150 leerlingen. Vorig jaar waren dat er 1085.
De **absolute toename** van het aantal leerlingen is $1150 - 1085$.

De **procentuele toename** is $\frac{1150 - 1085}{1085} \times 100\% \approx 6,0\%$.

Je vergelijkt met het oude aantal leerlingen, dus je deelt door OUD.

$$\text{procentuele verandering} = \frac{\text{NIEUW} - \text{OUD}}{\text{OUD}} \times 100\%$$

Bij een **procentuele afname** geeft deze formule een negatieve uitkomst.
Een trui van 59 euro wordt afgeprijsd naar 45 euro.

De procentuele verandering is $\frac{45 - 59}{59} \times 100\% \approx -23,7\%$.

Aan het minteken zie je dat er een afname is. Conclusie: de procentuele afname is 23,7%.

Voorbeeld

- a Een hoeveelheid neemt toe van 129 naar 138.
Bereken de procentuele toename.
- b Een ketting van €49,95 kost in de opruiming €35.
Hoeveel procent is de korting?

Uitwerking

- a OUD = 129 en NIEUW = 138.
 $\frac{138 - 129}{129} \times 100\% \approx 7,0\%$, dus de procentuele toename is 7,0%.
- b OUD = 49,95 en NIEUW = 35.
 $\frac{35 - 49,95}{49,95} \times 100\% \approx -29,9\%$, dus de korting is 29,9%.

15 Vul in.

- a Een hoeveelheid neemt toe van 560 naar 620.

OUD = en NIEUW =

..... $\times 100\% \approx$, dus de procentuele

is

- b** Een hoeveelheid neemt af van 380 naar 300.

oud = _____ en Nieuw = _____

_____ $\times 100\% \approx$ _____, dus de procentuele _____ is _____



- a** Een hoeveelheid neemt toe van 18 naar 20,5.

Bereken de procentuele toename.

- b** Een hoeveelheid neemt af van 412 naar 368.

Bereken de procentuele afname.

- c** Een hoeveelheid neemt toe van 0,075 naar 0,092.

Bereken de procentuele toename.

- d** Een hoeveelheid neemt af van 5,12 naar 4,56.

Bereken de procentuele afname.



- Een rekenmachine van € 21,99 wordt in prijs verhoogd en kost nu € 23,95.

Vul in.

oud = _____ en Nieuw = _____

_____ $\times 100\% \approx$ _____, dus de rekenmachine is _____ % duurder

geworden.



- Een auto is in prijs verlaagd van € 12 345 naar € 10 846.

Vul in.

oud = _____ en Nieuw = _____

_____ $\times 100\% \approx$ _____, dus de auto is _____ % goedkoper geworden.



- Bereken telkens de procentuele toename of afname.

- a** Een scooter is in prijs verlaagd van € 1200 naar € 1059.

- b** Het aantal leerlingen op een school is gedaald van 1379 naar 1212.

- c** Een zonnebril van 45 euro kost in de opruiming 32 euro.

- d** Een kaartje voor de dierentuin van € 28,50 wordt één euro duurder.

Door elkaar



- a** Geef de vermenigvuldigingsfactor bij een afname van 23%.

- b** Hoeveel procent is 85 van de 429?

- c** Een hoeveelheid neemt van 28 toe naar 29,5.

Bereken de procentuele toename.

- d** Op een school zit 12% van de 1250 leerlingen in havo 4.

Hoeveel leerlingen zitten in havo 4?

- e** In een klas van 31 leerlingen hebben 12 leerlingen een scooter.

Hoeveel procent heeft een scooter?

- f** Een hoeveelheid neemt af van 933 naar 859.

Bereken de procentuele afname.

THEMA 1 OUD berekenen bij procentuele toe- of afname

Een fiets wordt 12% duurder. De nieuwe prijs is 588 euro.

Om de oude prijs te berekenen, bedenk je dat

$$\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD}, \text{ dus } 588 = 1,12 \times \text{OUD}.$$

Je kunt ook zeggen $1,12 \times \text{OUD} = 588$. Deze vergelijking kun je oplossen.

$$1,12 \times \text{OUD} = 588$$

$$: 1,12 \quad \quad : 1,12$$

$$\text{OUD} = \frac{588}{1,12} = 525, \text{ dus de fiets kostte 525 euro.}$$

Let goed op het verschil tussen de volgende berekeningen.

Procentuele toename van 12%

Je weet OUD.

Je krijgt NIEUW met $\text{NIEUW} = 1,12 \times \text{OUD}$.

Je weet NIEUW.

$$\text{Je krijgt OUD met } \text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{1,12}.$$



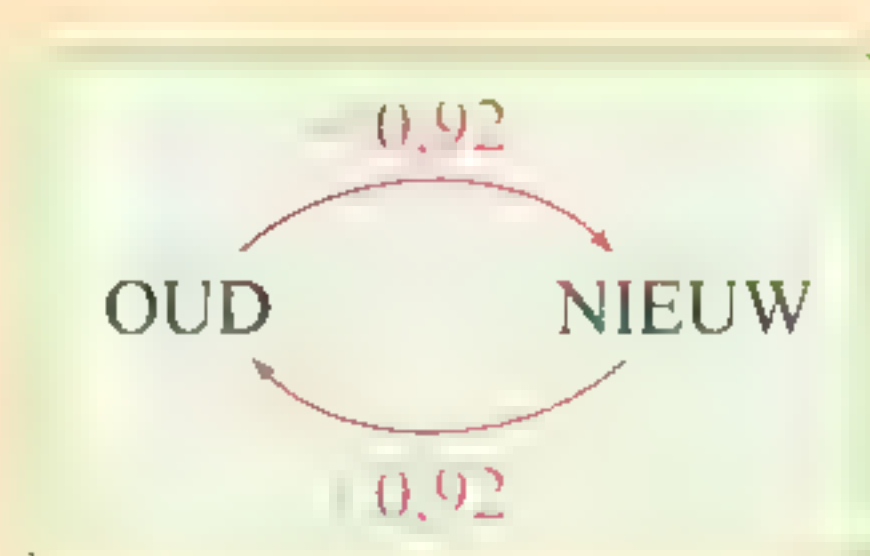
Procentuele afname van 8%

Je weet OUD.

Je krijgt NIEUW met $\text{NIEUW} = 0,92 \times \text{OUD}$.

Je weet NIEUW.

$$\text{Je krijgt OUD met } \text{OUD} = \frac{\text{NIEUW}}{0,92}.$$



Voorbeeld

a Een hoeveelheid neemt met 40% af tot 56.

Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op gehelen.

b Een televisie wordt 7,5% duurder en kost nu 789 euro.

Bereken de oude prijs.

Uitwerking

a De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{56}{0,6} \approx 93$. 40% afname, dus delen door 0,6.

b De oude prijs is $\frac{789}{1,075} \approx \text{€} 733,95$. 7,5% duurder, dus delen door 1,075.

21 Vul in. Rond de antwoorden af op gehelen.

- a** Een hoeveelheid neemt met 12% toe tot 550.

12% toename, dus delen door _____

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{\text{---}}{\text{---}} \approx \text{---}$

- b** Een hoeveelheid neemt met 16% af tot 340.

16% afname, dus delen door _____

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{\text{---}}{\text{---}} \approx \text{---}$

22 Rond de antwoorden af op gehelen.

- a** Een hoeveelheid neemt met 7% toe tot 380.

Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid.

- b** Een hoeveelheid neemt met 9% af tot 185.

Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid.

- c** Een hoeveelheid neemt met 18% af. Er blijft 250 over.

Hoeveel was er eerst?

- a** Een artikel wordt 5% duurder en kost nu € 23.

Bereken de oude prijs.

- b** Het aantal leerlingen in de brugklas is met 9,8% afgenomen ten opzichte van vorig jaar. Nu zitten er 230 leerlingen in de brugklas.

Hoeveel leerlingen zaten er vorig jaar in de brugklas?

- c** In 2020 heeft bouwbedrijf Grooten 3028 woningen gebouwd.

Dat is 3,8% meer dan in 2019.

Hoeveel woningen heeft Grooten in 2019 gebouwd?

Door elkaar

- 23** **a** Een artikel van € 25 wordt 8% duurder.

Bereken de nieuwe prijs.

- b** Een laptop wordt 14% in prijs verlaagd en kost nu € 823.

Bereken de prijs voor de prijsdaling.

- c** Op een school zijn 162 docenten. Hiervan is 14% ouder dan 60 jaar.

Hoeveel docenten zijn ouder dan 60 jaar?

- d** Een hoeveelheid neemt af van 933 naar 859.

Bereken de procentuele afname.

- e** Een hoeveelheid neemt met 15% af naar 23.

Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op gehelen.

THEMA 1 Van DEEL naar TOTAAL

Op een school komen 424 leerlingen met het openbaar vervoer naar school. Dat is 23% van alle leerlingen.

Om het totale aantal leerlingen te berekenen, gebruik je 23% van het TOTAAL is 424, dus $0,23 \times \text{TOTAAL} = 424$.

Dit geeft $\text{TOTAAL} = \frac{424}{0,23} \approx 1843$.

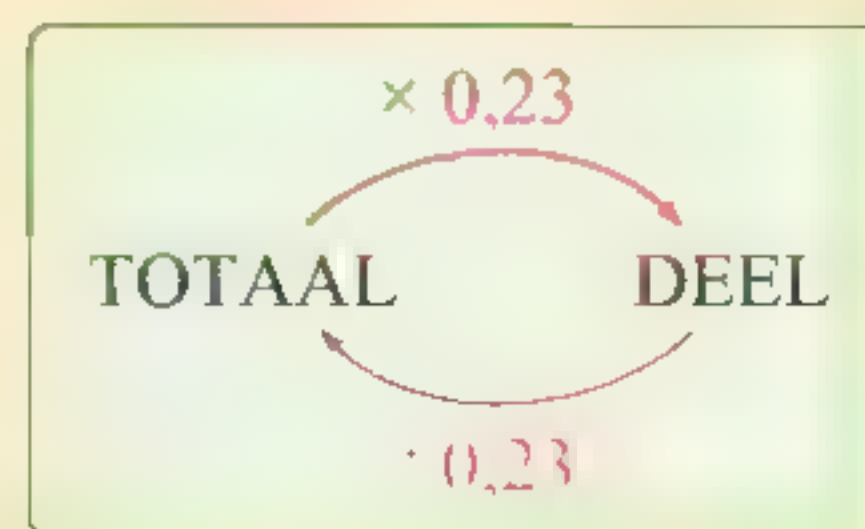
Een DEEL is 23% van het TOTAAL.

Je weet TOTAAL.

Je krijgt DEEL met $\text{DEEL} = 0,23 \times \text{TOTAAL}$.

Je weet DEEL.

Je krijgt TOTAAL met $\text{TOTAAL} = \frac{\text{DEEL}}{0,23}$.



Voorbeeld

- a** Van een hoeveelheid is 17% van het totaal gelijk aan 84.
Bereken de totale hoeveelheid. Rond af op gehelen.
- b** In klas 4M1 dragen 6 leerlingen een bril. Dat is 24% van alle leerlingen.
Hoeveel leerlingen zitten in de klas?

Uitwerking

a De totale hoeveelheid is $\frac{84}{0,17} \approx 494$.

17% is gelijk aan 84, dus delen door 0,17.

b In de klas zitten $\frac{6}{0,24} = 25$ leerlingen.

24% is gelijk aan 6, dus delen door 0,24.

 Vul in en rond de antwoorden af op gehelen.

- a** Van een hoeveelheid is 43% van het totaal gelijk aan 750.

43% is gelijk aan 750, dus delen door _____

Het totaal is _____ \approx _____

- b** Van een hoeveelheid is 21,2% van het totaal gelijk aan 489.

21,2% is gelijk aan 489, dus delen door _____

Het totaal is _____ \approx _____

26 Rond de antwoorden af op gehelen.

- a** Van een hoeveelheid is 9,5% van het totaal gelijk aan 715.
Bereken de totale hoeveelheid.
- b** Van een hoeveelheid is 35,8% van het totaal gelijk aan 673.
Bereken de totale hoeveelheid.

- a** Van alle vierdeklassers komt 78,2% met de fiets naar school.
Dat zijn 178 leerlingen.
Hoeveel vierdeklassers zijn er?
- b** De huurprijs van een woning gaat met € 32,45 per maand omhoog. Dat is een stijging van 3,9%.
Bereken de oude huurprijs.

Door elkaar

- 28 a** Bereken 5,7% van 132.
- b** Van een hoeveelheid is 5,7% van het totaal gelijk aan 132.
Bereken de totale hoeveelheid.
- c** Een fiets wordt 7,5% duurder en kost nu € 899.
Bereken de oude prijs.
- d** Hoeveel procent is 87,3 van 2694,8?
- e** Van een sportschool is 20,3% van de leden jonger dan 16 jaar.
Dat zijn 49 leden.
Hoeveel leden heeft de sportschool?

- a** Op een school zijn 32 van de 85 docenten jonger dan 40 jaar.
Hoeveel procent van de docenten is jonger dan 40 jaar?
- b** Een hoeveelheid neemt af van 13,7 naar 12,4.
Bereken de procentuele afname.
- c** Een hoeveelheid neemt met 8,5% toe tot 13,7.
Bereken de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond af op één decimaal.
- d** De afgelopen zomer gingen 1 290 000 Nederlanders kamperen in Frankrijk. Dat was 53,8% van alle Nederlanders die in het buitenland kampeerden.
Hoeveel Nederlanders kozen afgelopen zomer voor een kampeervakantie in het buitenland? Rond af op duizendtallen.
- e** Het aantal leerlingen van een basisschool is met 11,6% afgenomen ten opzichte van vorig jaar. Er zaten vorig jaar 118 leerlingen op de basisschool.
Hoeveel leerlingen zitten er dit jaar op de basisschool?
- f** Dit jaar zijn er 28 meer jongeren lid van de tennisclub dan vorig jaar. Dat is een toename van 22%.
Hoeveel jongeren zijn dit jaar lid van de tennisclub?

2 Algebra deel 1

2.1 Herleiden

Thema 1 Som van gelijke termen

Bij de optelling $3 + 4 + 5 = 12$ zijn de getallen 3, 4 en 5 de **termen**. De uitkomst 12 noemen we de **som**.

Je weet dat $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

Met letters gaat het net zo.

$$a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$$

Bij de vermenigvuldiging $3 \cdot 6 = 18$ zijn de getallen 3 en 6 de **factoren**.

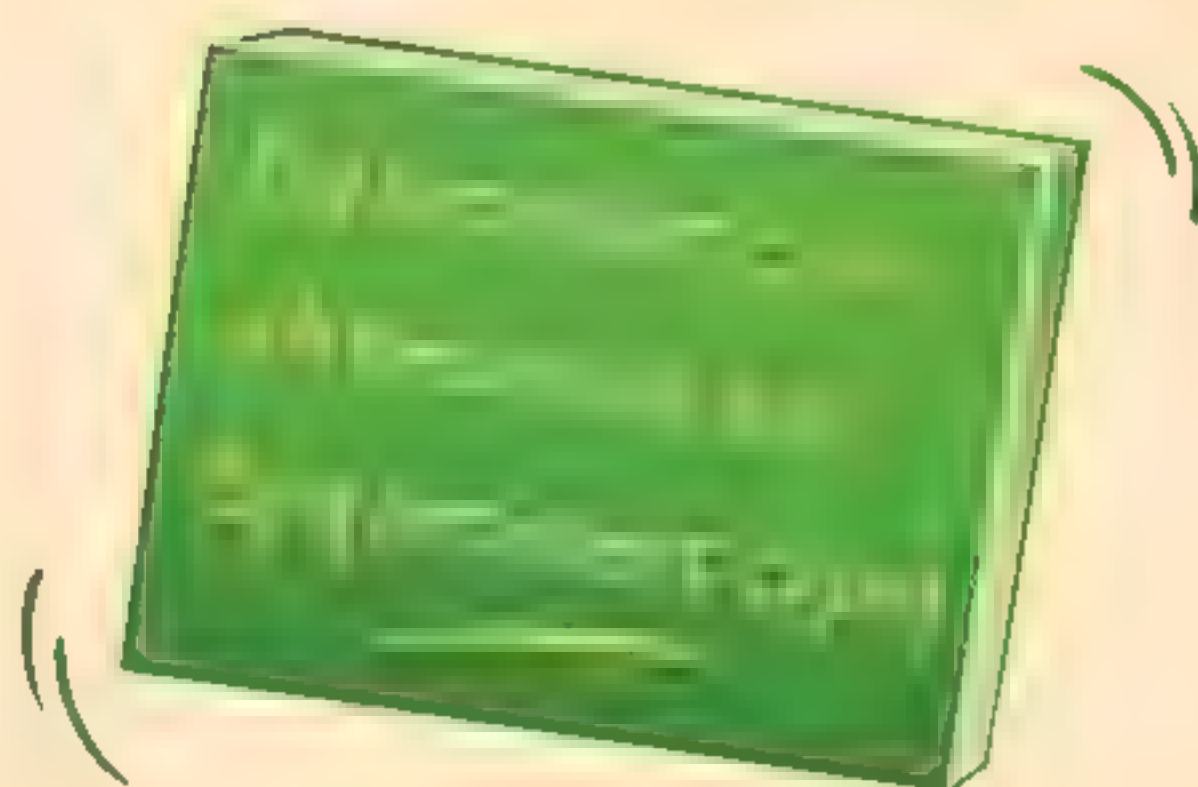
De uitkomst 18 noemen we het **product**.

$5a$ is het product van 5 en a .

$5a$ is dus een product van twee factoren.

$$5 \cdot 4 \text{ betekent } 5 \times 4$$

$$\underbrace{a + a + a + a + a}_{\text{som van vijf gelijke termen}} = \underbrace{5a}_{\text{product van twee factoren}}$$



 Schrijf als een product van twee factoren.

a $p + p + p =$ _____

b $x + x + x + x =$ _____

c $a + a + a + a + a + a + a =$ _____

 Schrijf als som.

a $5a =$ _____

b $4b =$ _____

c $7p =$ _____

Thema 1 Het herleiden van producten

Je kunt $2 \cdot 8b$ eenvoudiger schrijven, want

$$2 \cdot 8b = 2 \cdot 8 \cdot b = 16b.$$

We zeggen dat je $2 \cdot 8b$ kunt **herleiden** tot $16b$.

Een speciaal geval heb je bij $5a \cdot 4a$.

Zoals $6 \cdot 6 = 6^2$, zo is $a \cdot a = a^2$.

$$\text{Dus } 5a \cdot 4a = 20a \cdot a = 20a^2.$$

herleiden

=

eenvoudiger schrijven

Het kwadraat van a is a^2 .

Het dubbele van a is $2a$.

Producten herleid je zo:

- 1 Vermenigvuldig de getallen en zet ze voorop.
- 2 Zet de letters er in alfabetische volgorde achter en laat alle vermenigvuldigingspunten weg.

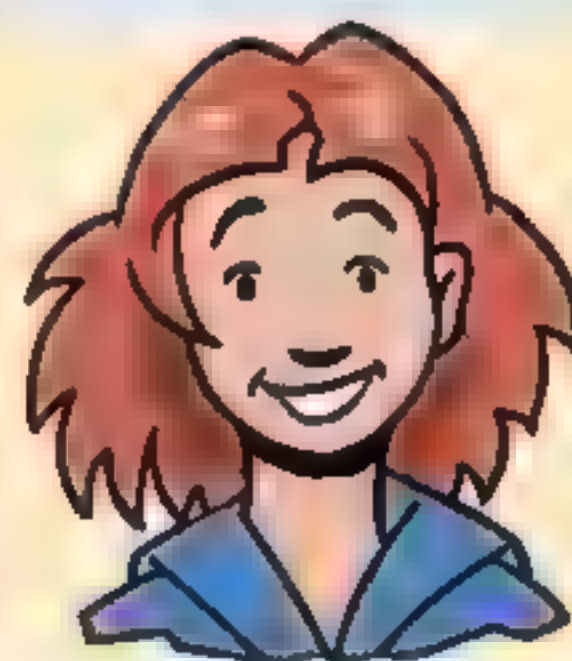
Voorbeeld

Herleid.

a $-4x \cdot -3y$

b $n \cdot -10k \cdot 2m$

c $6a \cdot -5a$



Uitwerking

a $-4x \cdot -3y = 12xy$

eerst $-4 \cdot -3 = 12$, dan xy

b $n \cdot -10k \cdot 2m = -20kmn$

eerst $1 \cdot -10 \cdot 2 = -20$, dan n, k en m alfabetisch

c $6a \cdot -5a = -30a^2$

eerst $6 \cdot -5 = -30$, dan $a \cdot a = a^2$

 Herleid.

a $15a \cdot 3b =$

d $-2p \cdot -15q =$

b $25p \cdot -3q =$

e $x \cdot -5 =$

c $-7b \cdot 7a =$

f $-k \cdot -l =$

 Herleid.

a $8x \cdot y \cdot 4z =$

d $5k \cdot 3l \cdot -m =$

b $-3b \cdot -a \cdot 3a =$

e $18y \cdot 0 \cdot -2x =$

c $-2a \cdot -8b \cdot -5 =$

f $-ac \cdot -8b =$

Thema 1 Gelijksoortige termen

Van de som $3a + 4a$ zijn $3a$ en $4a$ de termen.

In deze termen komt dezelfde letter voor.

Zulke termen heten **gelijksoortige termen**.

In de optelling $4b + 7b$ zijn $4b$ en $7b$ gelijksoortige termen.

Gelijksoortige termen kun je samennemen.

$$4b + 7b = \underbrace{b + b + b + b}_{4b} + \underbrace{b + b + b + b + b + b + b}_{7b} = 11b$$

In de optelling $3ab + 4ab$ zijn $3ab$ en $4ab$ gelijksoortige termen. Ook deze termen kun je samennemen.

$$3ab + 4ab = \underbrace{ab + ab + ab}_{3ab} + \underbrace{ab + ab + ab + ab}_{4ab} = 7ab$$

Bij aftrekken gaat het net zo.

$$6b - 2b = \underbrace{b + b + b + b + b + b}_{6b} - \underbrace{b + b}_{-2b} = 4b$$

Hiermee is $6b - 2b$ herleid tot $4b$.

Je schrijft zulke herleidingen *zonder tussenstap* op.



Voorbeeld

Herleid.

a $15a + 7a$

b $ab + 9ab$

c $20kl - 19kl$

d $3b - 3b$

Uitwerking

a $15a + 7a = 22a$

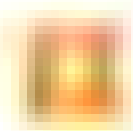
b $ab + 9ab = 10ab$

c $20kl - 19kl = kl$

$1kl = kl$

d $3b - 3b = 0$

$0b = 0$



Herleid.

a $6a + 11a =$

b $-22c + 21c =$

c $96x + 4x =$

d $19y - y =$

e $2q - 4q =$

f $kl + kl =$

g $-ab + ab =$

h $x - 3x + 7x =$

i $y + 2y + 3y =$

j $18z - 2z + z =$

Door elkaar

Herleid.

a $5b \cdot -5c =$ _____

b $5a + 11a =$ _____

c $8y \cdot 0 \cdot 5z =$ _____

d $-8b \cdot 5b \cdot -5 =$ _____

e $k + 3k + 5k =$ _____

f $-a \cdot -c =$ _____

Niet gelijksoortige termen

In de som $2a + 6a$ zijn de termen $2a$ en $6a$ gelijksoortig.

In de som $2a + 6b$ zijn de termen $2a$ en $6b$ *niet* gelijksoortig.

Zo'n som kun je niet herleiden.

Dus $2a + 6a$ kun je wel samennemen, maar $2a + 6b$ niet.

Ook $12ab + 7bc$ kun je niet samennemen, want $12ab$ en $7bc$ zijn niet gelijksoortig.

In gelijksoortige termen komen precies dezelfde letters voor.

Alleen gelijksoortige termen kun je samennemen.

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $8p + 7p$

c $8a + 3d$

e $7a - 7a$

b $6ab - ab$

d $2x - x$

f $9a + 1$

Uitwerking

a $8p + 7p = 15p$

c $8a + 3d$ kan niet

e $7a - 7a = 0$

b $6ab - ab = 5ab$

d $2x - x = x$

f $9a + 1$ kan niet

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3a + 10a$ _____

h $6a - 6b$ _____

b $3a + 10b$ _____

i $3a - 3a$ _____

c $8b - b$ _____

j $ab + bc$ _____

d $3p + 11$ _____

k $18ab + 6ac$ _____

e $ac - 6ac$ _____

l $8p - 7p$ _____

f $2xy + 8xy$ _____

m $4q + 4p$ _____

g $6p + 6p$ _____

n $5b - 3a$ _____

Door elkaar

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5a \cdot 12a$ _____

b $a + 4b$ _____

c $5x \cdot 7xy$ _____

d $3ab + 5bc$ _____

e $12ac \cdot 6a$ _____

f $8p - 8p$ _____

g $q + 4p$ _____

h $5 - 3a$ _____

i $15a + 12a$ _____

j $16ab - 16$ _____

k $a \cdot 4b$ _____

l $7xy + 4x$ _____

m $3ab - ab$ _____

n $12a \cdot 6a$ _____

o $8p - 3q$ _____

p $5pq + 9pq$ _____

Vermenigvuldigen met letters kan altijd.



Maar voor optellen en aftrekken zijn gelijksoortige termen nodig.



Vul in.

a $17a = 7a +$ _____

b $-24ac = 12a \cdot$ _____

c $45x = 5x +$ _____

d $20p = 55p -$ _____

e $25xy = x \cdot$ _____

f $14klm = 7 \dots\dots\dots +$ _____

g $27ab = 9a \cdot$ _____

h $4xy = 16xy -$ _____

2.2 Haakjes wegwerken

Tips & Tricks De regel $a(b + c) = ab + ac$

Alyssa koopt voor elk van haar vier kinderen een ijsje en een zakje chips.

Een ijsje kost € 1,50 en een zakje chips € 0,50.

Ze kan op twee manieren berekenen hoeveel ze moet betalen.

Of $4 \cdot (1,50 + 0,50)$ of $4 \cdot 1,50 + 4 \cdot 0,50$.

De uitkomst is in beide gevallen gelijk, dus

$$4 \cdot (1,50 + 0,50) = 4 \cdot 1,50 + 4 \cdot 0,50.$$

$4 \cdot (1,50 + 0,50)$ is van de vorm $4 \cdot (a + b)$, dus $4 \cdot (a + b) = 4 \cdot a + 4 \cdot b$.

Bij $4(a + b)$ kun je de termen a en b niet samennemen. Toch kun je $4(a + b)$ herleiden door middel van **haakjes wegwerken**. Je krijgt

$$4(a + b) = 4a + 4b$$

$$\boxed{4 \cdot a} \quad \boxed{4 \cdot b}$$

$4(a + b)$ betekent
 $4 \cdot (a + b)$.

Voor het wegwerken van haakjes gebruik je de volgende regel.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg.

a $2(4a + 3b)$

b $5(p + 3)$

c $2a(8 + 3b)$

Uitwerking

a $2(4a + 3b) = 8a + 6b$

b $5(p + 3) = 5p + 15$

c $2a(8 + 3b) = 16a + 6ab$

Werk de haakjes weg.

a $5(a + c) = \dots\dots\dots$

e $5a(2b + c) = \dots\dots\dots$

b $8(2a + b) = \dots\dots\dots$

f $3p(x + 3) = \dots\dots\dots$

c $a(3b + c) = \dots\dots\dots$

g $4a(b + \frac{1}{2}) = \dots\dots\dots$

d $x(2y + 3) = \dots\dots\dots$

h $3c(a + 1) = \dots\dots\dots$

THEMA 1 Haakjes wegwerken als er mintekens voorkomen

Je kunt ook haakjes wegwerken als er mintekens staan.

$$5(a - b) = 5a - 5b$$

$$-8(p - 3q) = -8p - (-24q) = -8p + 24q$$

Je mag in het vervolg de tussenstap weglaten.

$$\text{Zo is } -3(2m + 4n) = -6m - 12n.$$

Voorbeeld

Werk de haakjes weg.

a $-5(a + 3b)$

b $2b(a - 3)$

c $-(x - 3y)$

Uitwerking

a $-5(a + 3b) = -5a - 15b$

b $2b(a - 3) = 2ab - 6b$

c $-(x - 3y) = -x + 3y$

 Werk de haakjes weg.

a $-4(x + 2y) =$ _____

b $4(x - 2y) =$ _____

c $-4(x - 3) =$ _____

d $-4(2x + 8) =$ _____

e $-3a(2b + c) =$ _____

f $5a(3b - c) =$ _____

g $-2p(3q - 1) =$ _____

h $5q(2p + 8) =$ _____

THEMA 2 Haakjes wegwerken en herleiden

Bij het wegwerken van de haakjes bij $3(a - 2b) - 4(2a + b)$ heb je te maken met de twee stukken.

- $3(a - 2b) = 3a - 6b$
- $-4(2a + b) = -8a - 4b$

$$\text{Dus } 3(a - 2b) - 4(2a + b) = 3a - 6b - 8a - 4b = -5a - 10b.$$

En zo is

$$-3(3p + 5q) - 2(4p - 3q) = -9p - 15q - 8p + 6q = -17p - 9q.$$

Voorbeeld

Herleid.

a $3(a - 2b) - 5(a + b)$

b $-3(x - 2) + 5x$

c $5 - (a + 5)$

Uitwerking

a $3(a - 2b) - 5(a + b) = 3a - 6b - 5a - 5b = -2a - 11b$

b $-3(x - 2) + 5x = -3x + 6 + 5x = 2x + 6$

c $5 - (a + 5) = 5 - a - 5 = -a$

 Herleid.

a $3(a + 2b) - 6a$

b $-5(a - 2b) + 6a$

c $5(a - 2b) + 3(2a - b)$

d $8(a - b) - 5(a - 3)$

e $2a - (5 + 2a)$

f $-3(a - 1) - 3a$

Door elkaar

 Herleid.

a $3a - 2(a + 6)$

b $5a(c + 2)$

c $3 + a - 2(a + 6)$

d $8p(2r + s)$

e $3(a - 1) - (a - 8)$

f $-(2x - 3)$

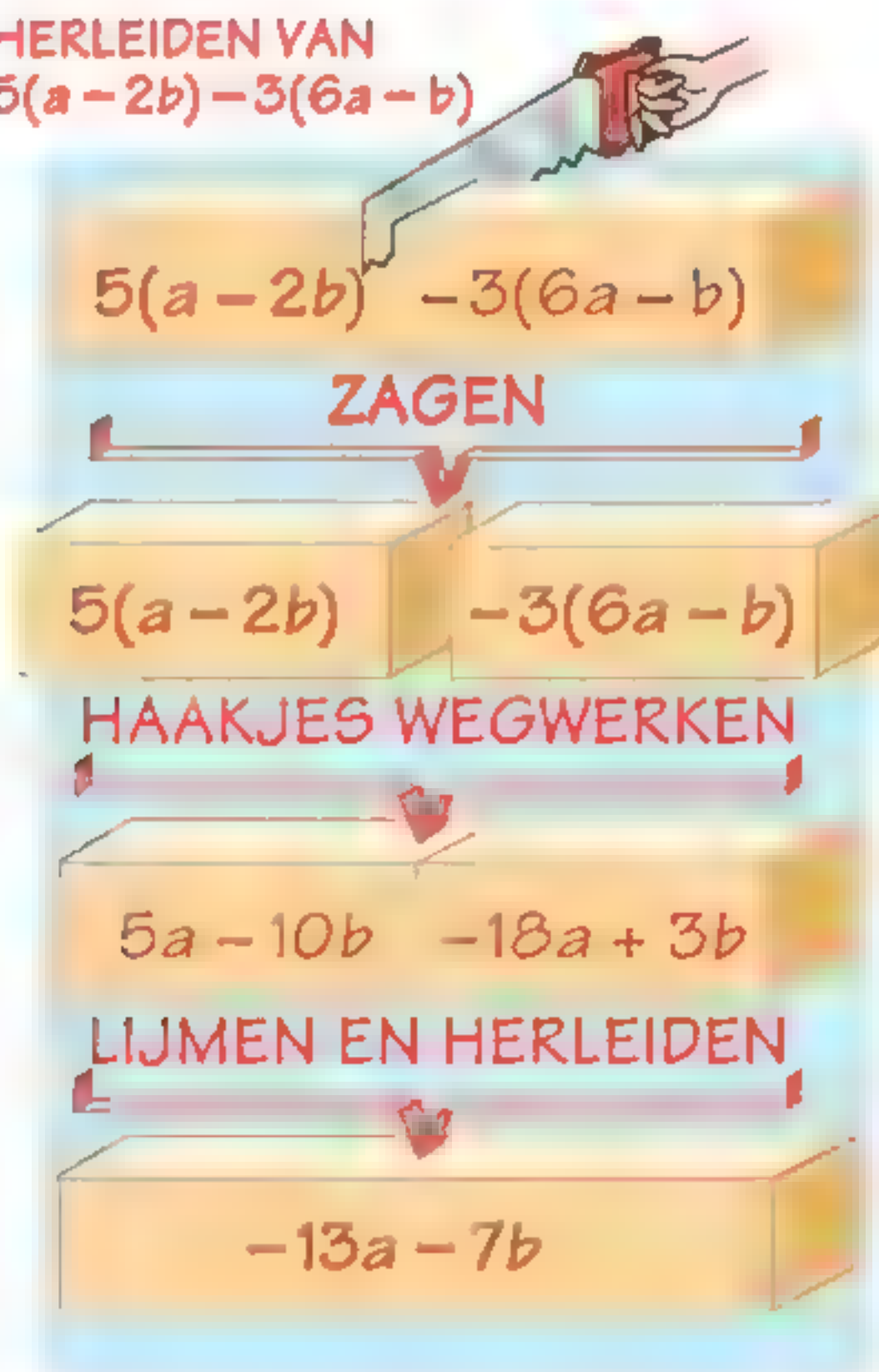
g $4(a - 1) - 2a + 8$

h $-4(x - 2y) - x(y - 3)$

i $-b(2 - a) + b - ab$

j $-5(-3p + q)$

HERLEIDEN VAN
 $5(a - 2b) - 3(6a - b)$



THEMA 1 De regel $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

De optelling $x + 4$ bestaat uit twee termen. Dit heet ook wel een **tweeterm**.

Ook $y + 7$ is een tweeterm. Bij het vermenigvuldigen van twee tweetermen heb je te maken met haakjes. Deze werk je als volgt weg.

$$(x + 4)(y + 7) = xy + 7x + 4y + 28$$

$(x + 4)(y + 7)$ betekent
 $(x + 4) \cdot (y + 7)$

Voor het vermenigvuldigen van twee tweetermen gebruik je de volgende regel.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Herleid.

a $(x + 2)(x + 10)$

b $(p - 3)(p + 7)$

c $(b - 5)(c - 12)$

Uitwerking

a $(x + 2)(x + 10) = x^2 + 10x + 2x + 20 = x^2 + 12x + 20$

b $(p - 3)(p + 7) = p^2 + 7p - 3p - 21 = p^2 + 4p - 21$

c $(b - 5)(c - 12) = bc - 12b - 5c + 60$

 Herleid.

a $(p + 5)(q + 4)$

b $(x + 12)(y + 2)$

c $(a + 3)(a + 8)$

d $(b + 15)(b + 3)$

e $(x + 4)(x + 3)$

f $(a + 2)(a + 30)$

Door elkaar

 Herleid.

a $5(a + 5) - 6$

b $(x + 5)(x - 2)$

c $-6(4a + 8) + 3$

d $(y + 4)(y - 7)$

e $3x - 2y + x(y - 5)$

f $3(a + 7) - 9$

g $(x + 3)(x - 1)$

h $-2(3a + 8) - 3a$

2.3 Letterrekenen met breuken

Tijdschrift 1 Gelijknamige breuken optellen en aftrekken

In de breuk $\frac{3}{7}$ is 3 de teller en 7 de noemer.

Bij de breuken $\frac{3}{7}$ en $\frac{2}{7}$ zijn de noemers gelijk.

Daarom zijn deze breuken **gelijknamig**.

Ook $\frac{3}{10}$ en $\frac{7}{10}$ zijn gelijknamig.

Gelijknamige breuken kun je direct optellen.

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \quad \boxed{3 + 2}$$

Je telt de tellers op. De noemer verandert niet.

Soms kun je na het optellen nog vereenvoudigen.

Bij breuken aftrekken gaat het op dezelfde manier.

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

: 2 : 2

Voorbeeld

Bereken.

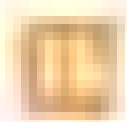
a $\frac{7}{20} + \frac{3}{20}$

b $\frac{2}{15} - \frac{8}{15}$

Uitwerking

a $\frac{7}{20} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

b $\frac{2}{15} - \frac{8}{15} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$



Bereken en vul in.

a $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} =$ _____

b $\frac{4}{10} - \frac{3}{10} =$ _____

c $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} =$ _____

d $\frac{2}{15} - \frac{7}{15} =$ _____

e $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} =$ _____

f $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ _____

Thema 1 Niet-gelijknamige breuken optellen

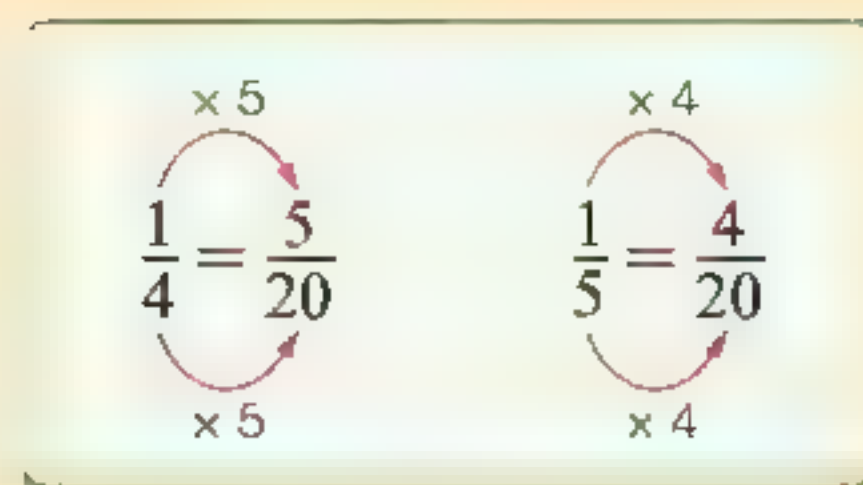
Bij de breuken $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ zijn de noemers niet gelijk.

De breuken $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{5}$ zijn **niet-gelijknamig**.

Om ze op te tellen, maak je de breuken eerst gelijknamig.

Je krijgt $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$.

De nieuwe noemer 20 krijg je door de noemers 4 en 5 met elkaar te vermenigvuldigen.



Bereken.

a $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$

b $\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$

Uitwerking

a $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{6}{14} + \frac{7}{14} = \frac{13}{14}$

neem als nieuwe noemer $7 \cdot 2 = 14$

b $\frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

neem als nieuwe noemer 6

 Bereken.

a $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} =$ _____

b $\frac{2}{5} - \frac{7}{10} =$ _____

c $\frac{5}{8} - \frac{2}{3} =$ _____

d $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} =$ _____

Door elkaar

 Bereken.

a $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} =$ _____

b $\frac{3}{10} - \frac{7}{10} =$ _____

c $\frac{2}{3} + \frac{1}{12} =$ _____

d $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} =$ _____

Theorie Breuken met letters vereenvoudigen

Omdat $\frac{6}{8}$ hetzelfde is als $\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$, mag je teller en noemer delen

door 2 en krijg je $\frac{3}{4}$.

Omdat $\frac{7x}{9x}$ hetzelfde is als $\frac{7 \cdot x}{9 \cdot x}$, mag je teller en noemer delen

door x en krijg je $\frac{7}{9}$.

Verder is $\frac{12yz}{18z} = \frac{2y}{3}$. Je hebt teller en noemer door 6 en door z gedeeld.

En zo is $\frac{8a}{-13a} = -\frac{8}{13}$. Je hebt teller en noemer door a gedeeld en de negatieve min voor de breuk gebracht.

 Vereenvoudig.

a $\frac{3b}{3d} =$ _____

b $\frac{3a}{5a} =$ _____

c $\frac{pq}{pr} =$ _____

d $\frac{5xy}{25xz} =$ _____

Vereenvoudigen mag ook in stappen!

$$\frac{15yz}{20z} \xrightarrow{\div 5} \frac{3yz}{4z} \xrightarrow{\div z} \frac{3y}{4}$$

 Herleid. Vereenvoudig eerst de breuken.

a $\frac{15a}{3} + 5a =$ _____

b $\frac{6xy}{3y} - x =$ _____

c $-\frac{ab}{b} - 2a =$ _____

d $\frac{15ac}{3c} - \frac{50ab}{5b} =$ _____

$$\frac{6ac}{c} + 4a = \frac{6a}{1} + 4a = 6a + 4a = 10a$$

 Herleid.

a $\frac{-16x}{4} + 4x =$ _____

b $\frac{28ab}{7ab} - 1 =$ _____

c $\frac{36pq}{12q} + 2p =$ _____

d $\frac{-21a}{7a} - \frac{12p}{3p} =$ _____

THEMA 1 Optellen en aftrekken van breuken met letters

Bij het optellen van *gelijknamige* breuken neem je de tellers samen,

de noemer verandert niet. Dus $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ en $\frac{2}{p} + \frac{5}{p} = \frac{7}{p}$.

Verder is $\frac{3p}{q} + \frac{4p}{q} = \frac{7p}{q}$ en $\frac{2x}{y} + \frac{7z}{y} = \frac{2x+7z}{y}$.

Niet-gelijknamige breuken maak je eerst gelijknamig voordat je ze op kunt tellen.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{y+2x}{xy}$$

De nieuwe noemer is $x \cdot y = xy$.

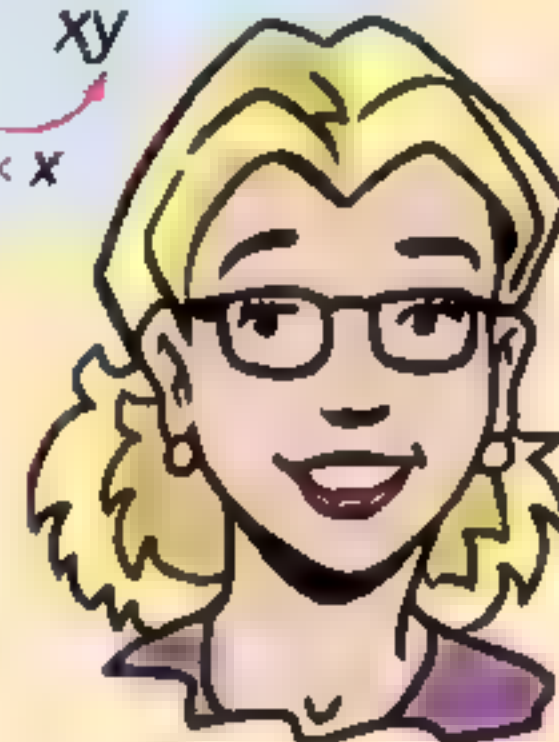
$$\frac{a}{4} + \frac{5}{b} = \frac{ab}{4b} + \frac{20}{4b} = \frac{ab+20}{4b}$$

De nieuwe noemer is $4 \cdot b = 4b$.

Vermenigvuldig de teller en noemer met dezelfde letter.

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{xy}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{2x}{xy}$$



Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{7}{3a} + \frac{1}{3a}$

b $\frac{1}{a} + \frac{6}{b}$

c $2 + \frac{3}{a}$

d $\frac{5}{a} - \frac{7}{2a}$

Uitwerking

a $\frac{7}{3a} + \frac{1}{3a} = \frac{8}{3a}$

b $\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{6a}{ab} = \frac{b+6a}{ab}$

c $2 + \frac{3}{a} = \frac{2}{1} + \frac{3}{a} = \frac{2a}{a} + \frac{3}{a} = \frac{2a+3}{a}$

d $\frac{5}{a} - \frac{7}{2a} = \frac{10}{2a} - \frac{7}{2a} = \frac{3}{2a}$

Herleid.

a $\frac{8}{3p} + \frac{7}{3p}$

b $\frac{5}{2x} - \frac{7}{2x}$

c $\frac{2}{p} + \frac{4}{q}$

d $\frac{6}{k} - \frac{5}{m}$

e $\frac{13}{2y} - \frac{3}{2y}$

f $6 - \frac{1}{p}$

Door elkaar

Herleid.

a $\frac{p}{4p} + \frac{1}{p}$

d $\frac{3}{p} + \frac{1}{4}$

b $\frac{18ac}{6c} + 2a$

e $\frac{3x}{x} + 8$

c $\frac{11}{a} - \frac{5}{2b}$

f $\frac{24q}{8q} - \frac{28q}{7q}$

Opdracht 2 Breuken vermenigvuldigen en delen

Bij het vermenigvuldigen van breuken gebruik je de volgende regel.

$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

Dus $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}$ en $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$.

Omdat $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{10} = 1$, heten de breuken $\frac{2}{5}$ en $\frac{5}{2}$ **elkaars omgekeerde**.

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Bereken.

a $\frac{2}{5} : \frac{7}{12}$

b $\frac{5}{8} : 2$

c $\frac{5}{8} \cdot 16$

Uitwerking

a $\frac{2}{5} : \frac{7}{12} = \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{7} = \frac{24}{35}$

b $\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{8} : \frac{2}{1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$

c $\frac{5}{8} \cdot 16 = \frac{5}{8} \cdot \frac{16}{1} = \frac{80}{8} = 10$

Bereken.

a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

d $\frac{2}{5} : 4$

b $3 \cdot \frac{2}{7}$

e $-\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$

c $-5 \cdot \frac{2}{7}$

f $\frac{1}{8} : 12$

THEMA 1 Breuken met letters vermenigvuldigen en delen

Het vermenigvuldigen en delen van breuken met letters gaat op dezelfde manier als bij breuken met getallen.

Vermenigvuldigen

$$\frac{3}{x} \cdot \frac{4}{y} = \frac{12}{xy}$$

$$\frac{a}{5} \cdot \frac{a}{-b} = -\frac{a^2}{5b}$$

Delen

$$\frac{2}{c} : \frac{5}{d} = \frac{2}{c} \cdot \frac{d}{5} = \frac{2d}{5c}$$

$$4 : \frac{6}{a} = \frac{4}{1} \cdot \frac{a}{6} = \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3}$$

Herleid.

a $\frac{7}{x} \cdot y$

b $\frac{3}{k} : \frac{27}{l}$

Uitwerking

a $\frac{7}{x} \cdot y = \frac{7}{x} \cdot \frac{y}{1} = \frac{7y}{x}$

b $\frac{3}{k} : \frac{27}{l} = \frac{3}{k} \cdot \frac{l}{27} = \frac{3l}{27k} = \frac{l}{9k}$

25 Herleid.

a $\frac{x}{12} \cdot \frac{9}{y}$

c $\frac{p}{9} \cdot r$

b $\frac{a}{4} : \frac{3}{c}$

d $\frac{a}{5} : \frac{8b}{c}$

Door elkaar

26 Herleid.

a $\frac{3}{x} + \frac{2}{y}$

f $\frac{1}{6} : a$

b $\frac{2p}{pq} + \frac{7}{q}$

g $\frac{5a}{10a} + \frac{4a}{2a}$

c $\frac{3}{p} \cdot \frac{6}{q}$

h $5 - \frac{3}{a}$

d $\frac{6}{r} : \frac{p}{9}$

i $\frac{9xy}{3y} - x$

e $\frac{4}{ab} - \frac{8}{ab}$

j $\frac{10}{b} - \frac{4}{9a}$

2.4 Machten

Tip: Machten vermenigvuldigen

Een **macht** is een product van gelijke factoren.

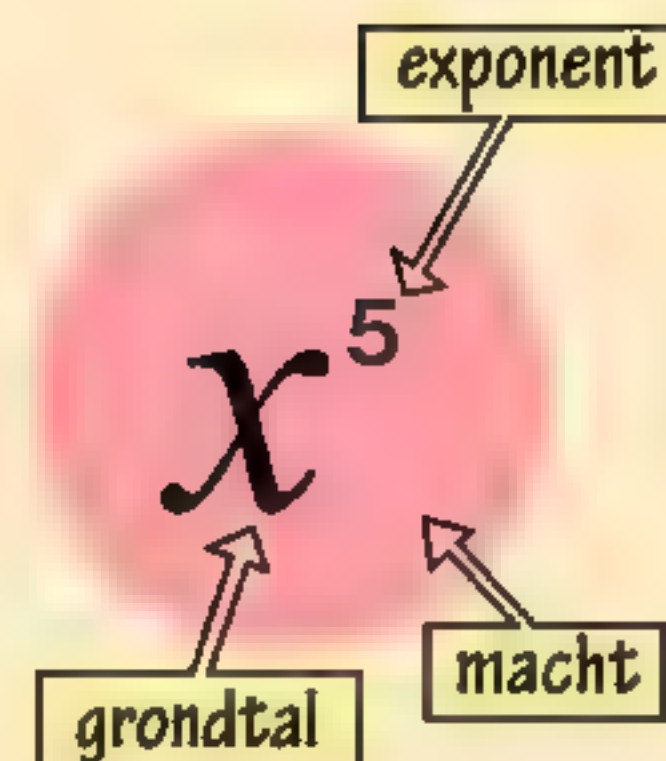
Zo is $x^5 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ en is $x^2 = x \cdot x$.

Een product van twee machten met hetzelfde **grondtal** kun je schrijven als één macht.

Zo is $x^5 \cdot x^2 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^7$.

De exponent 7 krijg je door exponenten 5 en 2 op te tellen.

Je ziet dat het grondtal x gelijk blijft.



Bij het product van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op. Het grondtal blijft gelijk.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

Dus $a^7 \cdot a^9 = a^{16}$ en $2p^3 \cdot 5p^4 = 10p^7$ en $a^8 \cdot 8a = 8a^9$.

In $2b^5 \cdot 4a^3$ zijn de grondtallen niet hetzelfde. Je mag de exponenten dan niet optellen. Je krijgt $2b^5 \cdot 4a^3 = 8a^3b^5$.

Voorbeeld

Herleid.

a $2a^3 \cdot 6a^4$

b $-3x^4 \cdot x^8$

c $4c \cdot -4c^5 \cdot -2c^8$

d $2x^4 \cdot 3y^5$

Uitwerking

a $2a^3 \cdot 6a^4 = 12a^7$

b $-3x^4 \cdot x^8 = -3x^{12}$

c $4c \cdot -4c^5 \cdot -2c^8 = 32c^{14}$

d $2x^4 \cdot 3y^5 = 6x^4y^5$

$2 \cdot 6 = 12$ en $3 + 4 = 7$

$-3 \cdot 1 = -3$ en $4 + 8 = 12$

$4 \cdot -4 \cdot -2 = 32$, $c = c^1$ en $1 + 5 + 8 = 14$

de grondtallen x en y zijn niet gelijk



Herleid.

a $2b^3 \cdot 2b^2 =$

b $3k^2 \cdot -9k^5 =$

c $5x^{10} \cdot -y^{10} =$

d $-3y \cdot -y^{13} =$

e $11a^4 \cdot -2b^5 =$

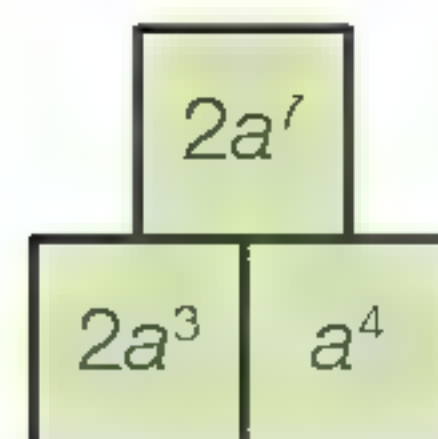
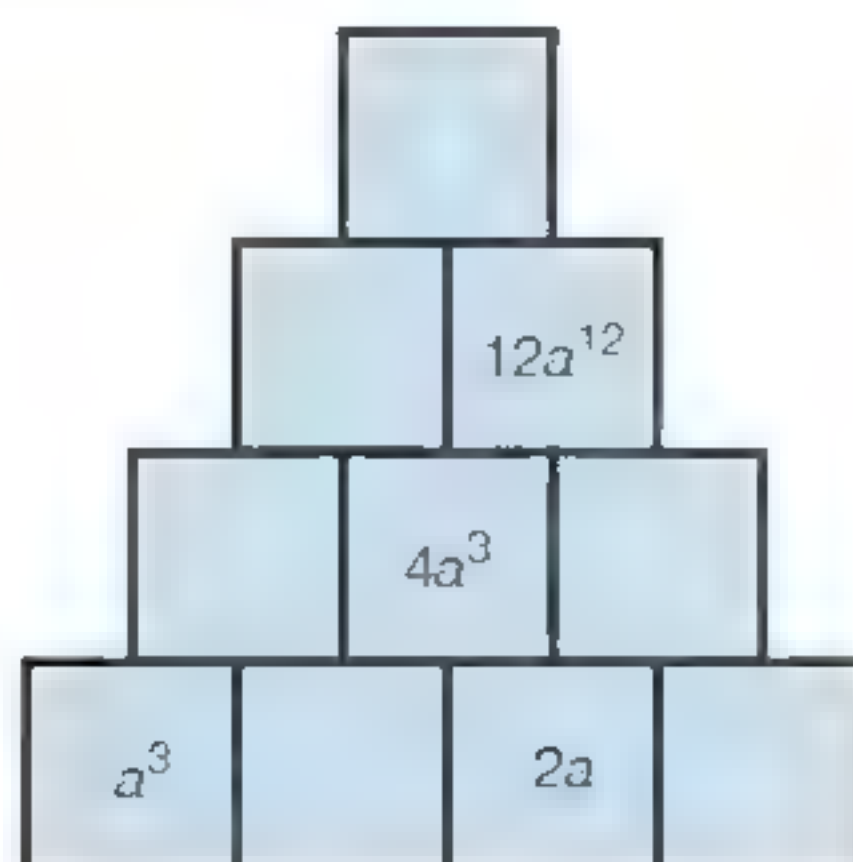
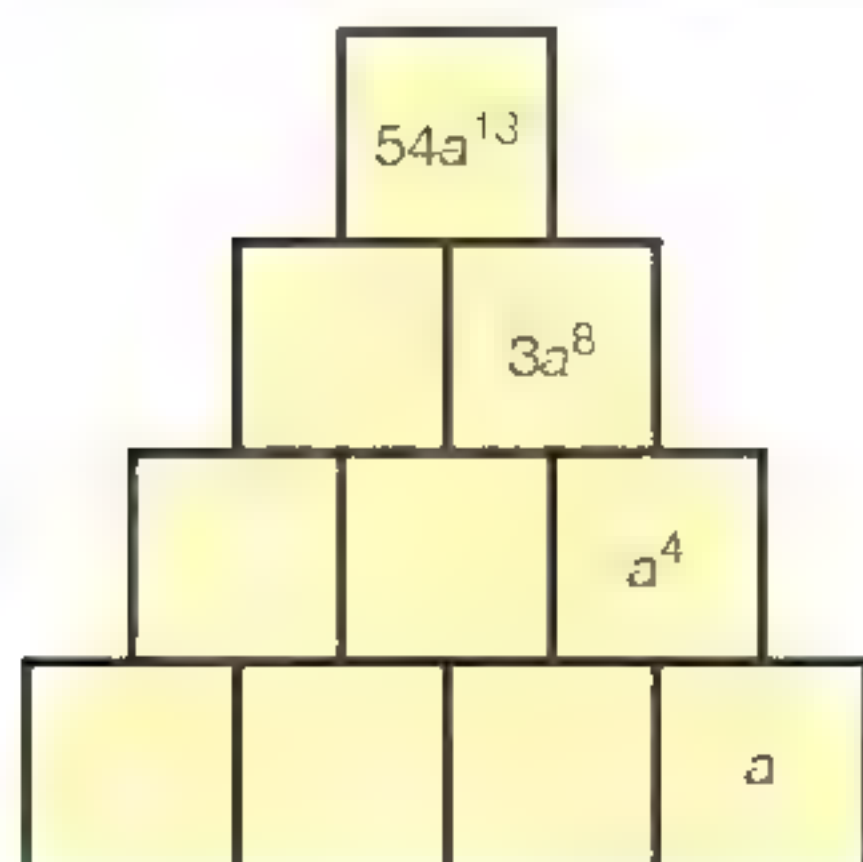
f $4x^3 \cdot 2x^7 \cdot -2x^2 =$

g $-3a^3 \cdot -a^6 \cdot 2c =$

h $-x \cdot -12x^4 \cdot x^2 =$



In elk hokje van de vermenigvuldigingspiramide komt het product van de twee hokjes eronder. Vul de vermenigvuldigpiramides verder in.



Theorie B Machten optellen

Van de som $2x^2 + 5x^2$ zijn de termen $2x^2$ en $5x^2$ gelijksoortig, want in beide termen zit hetzelfde grondtal met dezelfde exponent. Je kunt $2x^2 + 5x^2$ herleiden tot $7x^2$, maar je kunt $5x^3 + 2x^5$ niet herleiden, want de termen zijn niet gelijksoortig.

Ook $4a^2b + 7ab^2$ kun je niet herleiden, want de termen a^2b en ab^2 zijn niet gelijksoortig.

Voorbeeld

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3x^2 + 2x^2$

c $4ab^2 - 5ab^2$

e $8kl^2 - 4k^3l^2$

b $6x^5 + x^5$

d $-6a^3b^2 + 7a^3b^2$

f $9a^5b^2 - 3a^5b^2$

Uitwerking

a $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$

c $4ab^2 - 5ab^2 = -ab^2$

e $8kl^2 - 4k^3l^2$ kan niet

b $6x^5 + x^5 = 7x^5$

d $-6a^3b^2 + 7a^3b^2 = a^3b^2$

f $9a^5b^2 - 3a^5b^2 = 6a^5b^2$



Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5x^2 + 9x^2$

b $-5a^4 + 5a^4$

c $3x^3y - x^3y^2$

d $xy^3 + 3xy^3$

e $-a^4b^2 - a^4b^2$

f $-4y^2 + 3y^2$

Bijzondere gevallen:

$a^5 + a^5 = 2a^5$

$a^5 - a^5 = 0$

$2a^5 - a^5 = a^5$

$a^5 \cdot a^5 = a^{10}$



Door elkaar

30 Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $13x^4y^3 + x^4y^3$

d $3b^5 \cdot 4b^7$

b $-b^5 + b^5$

e $4x^3y^2 \cdot -6x^4y^9$

c $6ab^2 + 5a^4b$

f $6a^6b - 8a^6b$

Theorie Een macht van een macht

x^3 is een macht, dus $(x^3)^5$ is een macht van een macht.

$(x^3)^5$ betekent $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3$, dus

$$(x^3)^5 = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^{3+3+3+3+3} = x^{15}.$$

**Bij een macht van een macht blijft het grondtal gelijk.
Verder vermenigvuldig je de exponenten met elkaar.**

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

Herleid.

a $(x^5)^6$

b $5(a^2)^9 - 2(a^3)^6$

c $(b^4)^2 \cdot 3b$

Uitwerking

a $(x^5)^6 = x^{30}$

b $5(a^2)^9 - 2(a^3)^6 = 5a^{18} - 2a^{18} = 3a^{18}$

c $(b^4)^2 \cdot 3b = b^8 \cdot 3b = 3b^9$

31 Herleid.

a $(x^3)^5 =$

b $(b^7)^2 =$

c $6x^2 \cdot (x^2)^4 =$

d $(a^2)^4 + (a^4)^2 =$

e $3a^{10} - 4(a^5)^2 =$

f $11(y^6)^5 - 11(y^{15})^2 =$

Door elkaar

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $6x^4y^6 - x^4y^6$ _____

b $3a^{10} - 4(a^5)^2$ _____

c $x^5 \cdot -2x^9$ _____

d $a^2b^3 + 2a^3b^2$ _____

e $-a^3b^5 \cdot -a^6$ _____

f $4x^4y^8 - 9x^4y^8$ _____

g $-3a^3 \cdot 4ab^5$ _____

h $2x^4 - 4(x^2)^2$ _____

Thema D De macht van een product

$(xy)^3$ is de derde macht van het product xy .

Werk je de haakjes weg, dan krijg je

$$(xy)^3 = x^3y^3, \text{ want } (xy)^3 = xy \cdot xy \cdot xy = x^3y^3.$$

Bij een macht van een product neem je elke factor tot die macht.

$$(ab)^p = a^p b^p$$

Herleid.

a $(ab)^6$

b $(-3b^2)^4$

c $-5(pq)^7$

Uitwerking

a $(ab)^6 = a^6 b^6$

b $(-3b^2)^4 = (-3)^4 \cdot b^8 = 81b^8$

c $-5(pq)^7 = -5p^7 q^7$

33 Herleid.

a $(xy)^6 =$ _____

d $-(3b)^2 =$ _____

b $(7x)^2 =$ _____

e $-4(x^2y)^3 =$ _____

c $(-a)^7 =$ _____

f $(xyz)^5 =$ _____

Door elkaar

Herleid.

a $(-2x^2)^3$

b $(xyz^2)^5$

c $(-2a^2b^2c)^4$

d $(5x^3)^2 + 5(x^2)^3$

e $4(ab)^4 \cdot a^3b^5$

f $(-2q^4)^3 - (q^6)^2$

Machten op elkaar delen

Je kunt $\frac{a^5}{a^2}$ schrijven als een macht van a , want $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a^3 \cdot a^2}{a^2} = a^3$.

Teller en noemer zijn gedeeld door a^2 .

Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af. Het grondtal blijft gelijk.

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

Bij het herleiden van $\frac{12a^{10}}{4a^2}$ krijg je $\frac{12a^{10}}{4a^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{a^{10}}{a^2} = 3a^8$.

Schrijf voortaan in één keer op $\frac{12a^{10}}{4a^2} = 3a^8$.

Je weet dat $\frac{4}{4} = 1$ en $\frac{7a}{7a} = 1$, dus ook $\frac{a^5}{a^5} = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^p}{a^p} = 1 \\ \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0 \end{array} \right\} a^0 = 1$$

Voorbeeld

Herleid.

a $\frac{b^{11}}{b^7}$

c $\frac{y^7}{y^7}$

b $\frac{q^4}{q}$

d $\frac{8x^{15}}{2x^5}$

Uitwerking

a $\frac{b^{11}}{b^7} = b^4$

c $\frac{y^7}{y^7} = 1$

b $\frac{q^4}{q} = q^3$

d $\frac{8x^{15}}{2x^5} = 4x^{10}$



Herleid.

a $\frac{a^8}{a^3} =$ _____

b $\frac{y^9}{y} =$ _____

c $\frac{11b^5}{11b^5} =$ _____

d $\frac{12x^{10}}{4x^5} =$ _____

Door elkaar

36

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\frac{a^{13}}{a^{10}}$ _____

b $a^{10} + a^{13}$ _____

c $(10a)^3$ _____

d $10a + 13a$ _____

e $a^{10} \cdot a^{13}$ _____

f $\frac{10a}{13a}$ _____

g $a^{13} - a^{10}$ _____

h $\frac{16a^8}{4a^6}$ _____

i $a^9 \cdot (a^5)^2$ _____

j $a^9 + 4(a^3)^2$ _____

k $5a^6 - 3(a^3)^2$ _____

l $11a^7 - 7a^7$ _____

m $3p^7 \cdot -8p^4$ _____

n $\frac{p^{12}}{(p^2)^6}$ _____

o $-8y^3 \cdot 5y^2$ _____

p $12a^6 - 4a^2 \cdot 2a^4$ _____

3 Lineaire vergelijkingen en formules

3.1 Lineaire vergelijkingen

Thema 1 Termen overbrengen

De vergelijking $6x - 13 = 8x - 3$ is een voorbeeld van een **lineaire vergelijking**. Je lost deze vergelijking op in drie stappen.

$$6x - 13 = 8x + 3$$

$$-8x \quad -8x$$

$$-2x - 13 = 3$$

$$+13 \quad +13$$

$$-2x = 16$$

$$: 2 \quad : 2$$

$$x = -8$$

Het kan ook anders. Je doet dan stap 1 en 2 tegelijk. Je brengt de term met de **variabele** naar links en de losse getallen naar rechts. Dat mag, maar je vervangt dan wel een $-$ door een $+$ en andersom.

Dus $8x$ wordt $-8x$ en -13 wordt $+13$. Deze manier noemen we **overbrengen van termen** en dit gaat als volgt.

$$6x - 13 = 8x + 3$$

$$6x - 8x = 3 + 13$$

$$-2x = 16$$

$$x = -8$$

breng $8x$ naar het linkerlid en -13 naar het rechterlid

herleid beide leden

deel links en rechts door het getal voor de variabele



Voorbeeld

Los op.

a $10a - 4 = 7a + 20$

b $4 + 2x = x - 3$

Uitwerking

a $10a - 4 = 7a + 20$

$$10a - 7a = 20 + 4$$

$$3a = 24$$

$$a = 8$$

b $4 + 2x = x - 3$

$$2x - x = -3 - 4$$

$$x = -7$$

Los op. Gebruik het overbrengen van termen.

Letters links, rest rechts.

a $5x - 7 = 12x - 7$

b $3a - 2 = a + 4$

c $-5b - 10 = -6b + 3$

d $x - 5 = 4x + 1$

Lineaire vergelijkingen oplossen

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: Lineaire vergelijkingen oplossen

- 1 Werk zo nodig de haakjes weg.
- 2 Breng de termen met de variabele naar het linkerlid en de rest naar het rechterlid.
- 3 Herleid beide leden.
- 4 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Voorbeeld

Los op.

a $5(x - 2) = 9x + 22$

b $3(x + 6) = -6(x - 9)$

Uitwerking

a $5(x - 2) = 9x + 22$

$$5x - 10 = 9x + 22$$

$$5x - 9x = 22 + 10$$

$$-4x = 32$$

$$x = -8$$

b $3(x + 6) = -6(x - 9)$

$$3x + 18 = -6x + 54$$

$$3x + 6x = 54 - 18$$

$$9x = 36$$

$$x = 4$$

Los op.

a $5(x - 3) = 2x + 9$

b $5a + 7 = 3(a + 8)$

c $3(x - 1) = -x + 12$

d $2y - 8 = 3 + 3(y - 7)$

e $4(x - 4) = 5(x - 5)$

f $3(y + 5) = -2(y + 10)$

Los op.

a $9x = x - 16$

b $4(3x - 2) + 12 = 28$

c $2(p - 2) = 3(p + 5)$

d $-y - 1 = 2y$

e $5(3y - 7) + 7 = 7(2y - 4)$

f $5a - 10 = 3a - 2$

3.2 Lineaire formules

Thema 3.2 De grafiek van een lineaire formule

De formule $B = 40x + 20$ is een voorbeeld van een **lineaire formule**.
Er bestaat een **lineair verband** tussen x en B .

De grafiek van een lineaire formule is een rechte lijn.
Om een lijn te kunnen tekenen, heb je maar twee punten te weten.
In de tabel van een lineaire formule zet je daarom twee punten.

Voorbeeld

- Teken de grafiek van $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- Ga met een berekening na of het punt $P(-12, 8)$ op de grafiek ligt.

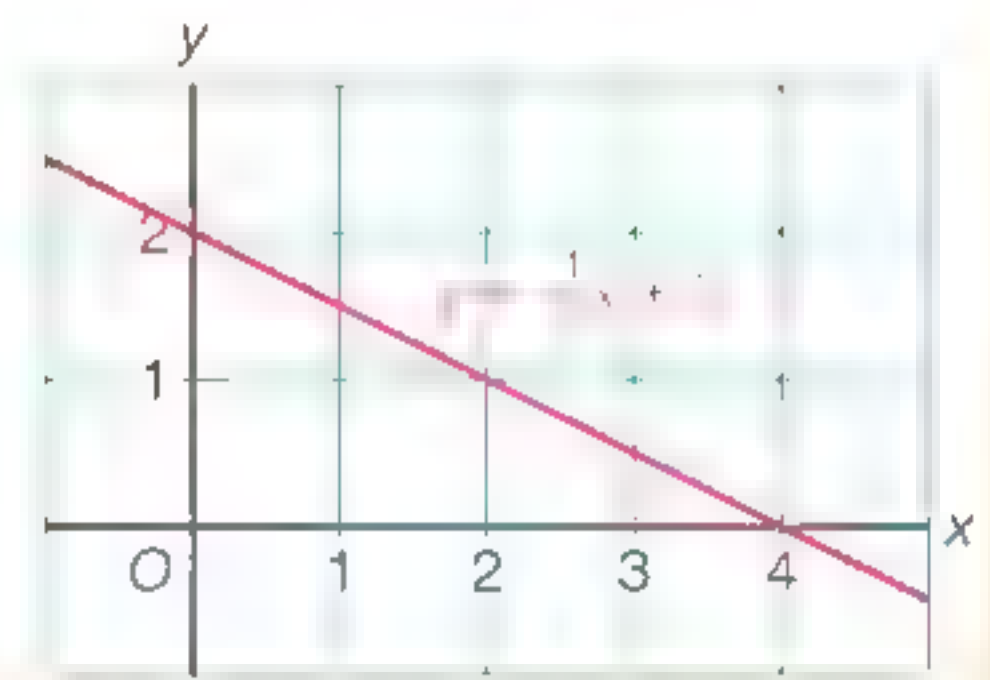
Uitwerking

a

x	0	4
y	2	0

Zie de figuur hiernaast.

- b** $x = -12$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot -12 + 2 = 8$
Dus P ligt op de grafiek.



- Teken in het assenstelsel hiernaast de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x + 2$. Vul eerst de tabel in.

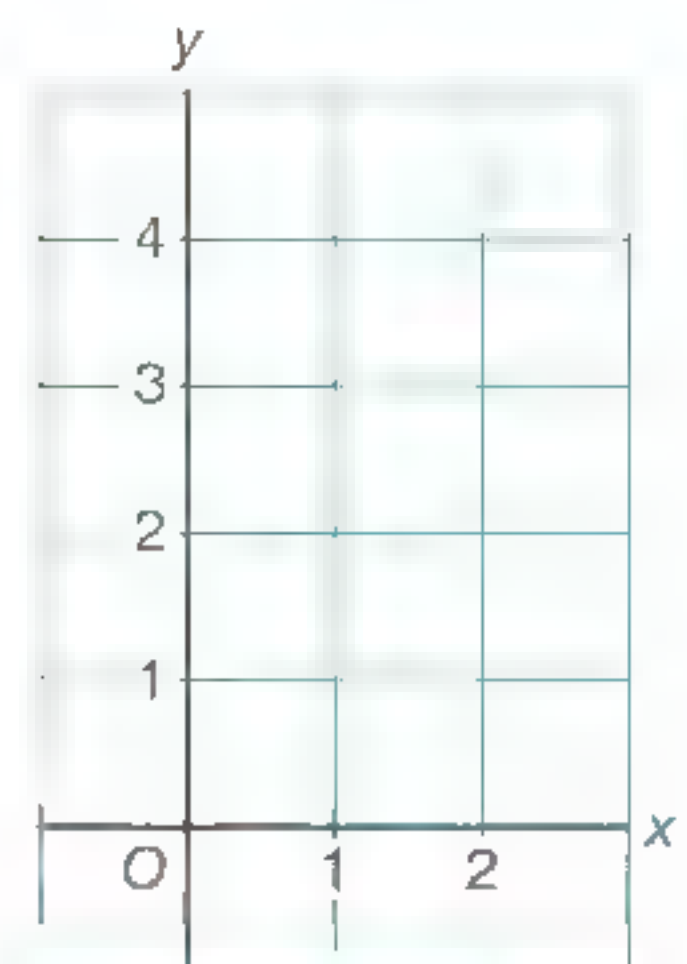
x	0	2
y		

- Ga met een berekening na of de volgende punten op de grafiek liggen.

$$A(5, 9\frac{1}{2})$$

$$B(5, 3\frac{1}{2})$$

$$C(14, 23)$$



- a** Teken hiernaast de grafiek van $y = 5 - 0,6x$. Vul eerst de tabel in.

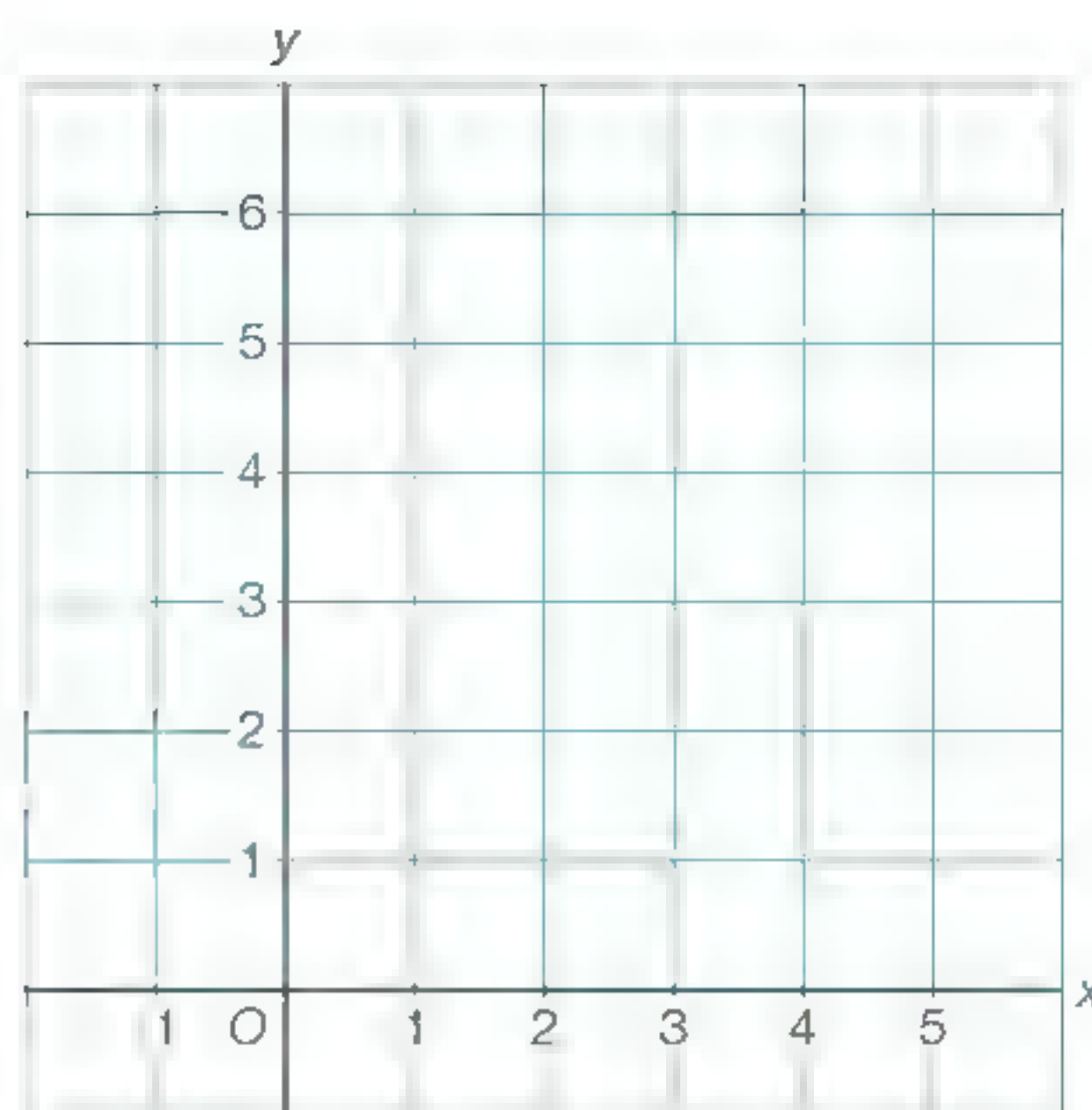
x	
y	

- b** Onderzoek welke van de volgende punten op de grafiek liggen.

$P(7, 1)$

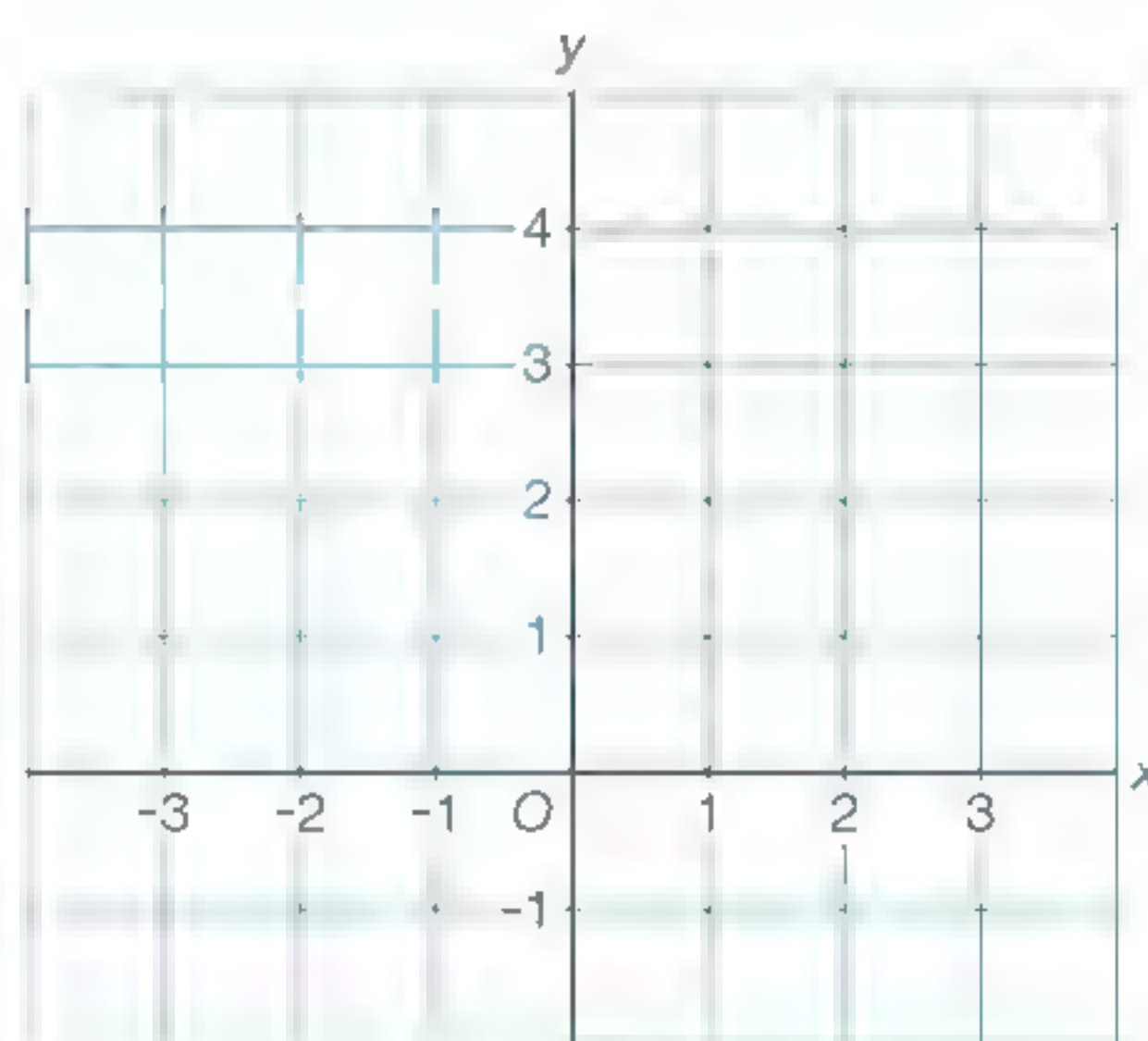
$Q(-5, 8)$

$R(20, -13)$



- a** Teken hiernaast de grafieken van $y = 1\frac{1}{2}x$ en $y = x - 3$ en $y = -2x + 4$. Maak eerst tabellen in je schrift.

- b** Op welke van deze grafieken ligt het punt $P(-8, -12)$?



Theorie B De formule $y = ax + b$

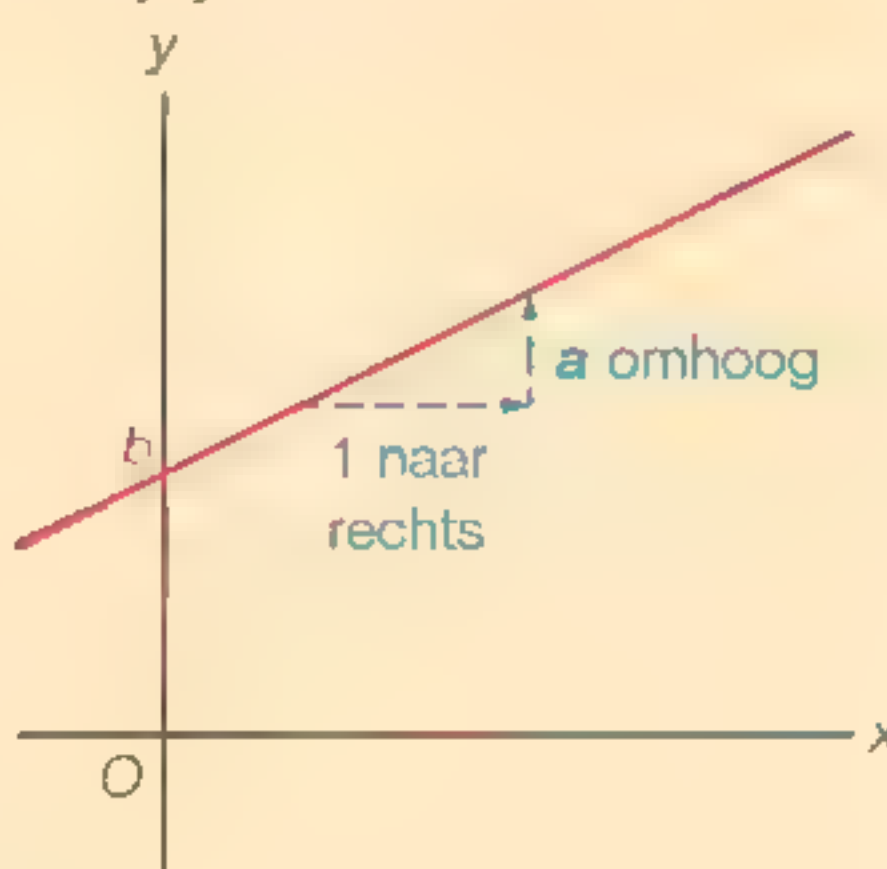
Bij een lineair verband tussen x en y hoort een formule van de vorm $y = ax + b$.

In deze formule is a de **richtingscoëfficiënt (rc)**, dit betekent 1 naar rechts en a omhoog. De hoogte waarop de grafiek de y -as snijdt, is b .

Voor $a = -2$ en $b = 6$ krijg je de formule $y = -2x + 6$. De grafiek van $y = -2x + 6$ heeft $rc = -2$ en snijdt de y -as in het punt $(0, 6)$.

Voor $a = 3$ en $b = 0$ krijg je $y = 3x + 0$, oftewel $y = 3x$. De grafiek heeft $rc = 3$ en snijdt de y -as in het punt $(0, 0)$.

De lijn $y = ax + b$



De grafiek van $y = ax + b$ is een lijn met $rc = a$ en snijdt de y -as in het punt $(0, b)$.

De grafieken van $y = 3x - 5$ en $y = 3x + 2$ hebben beide $rc = 3$.

De grafieken hebben dezelfde richting, ze zijn **evenwijdig**.

De grafieken van $y = 3x - 5$ en $y = -2x - 5$ hebben hetzelfde snijpunt met de y -as, namelijk het punt $(0, -5)$.

7 Gegeven zijn de volgende formules.

$$y = 1\frac{1}{2}x + 4$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = 1\frac{1}{2}x + 3$$

- a** Van welke formules snijden de grafieken de y -as in hetzelfde punt? Hoe kun je dat aan de formules zien?
- b** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig? Hoe kun je dat aan de formules zien?

8 Gegeven zijn de volgende formules.

$$\text{I } y = 2\frac{1}{2}x + 4$$

$$\text{III } y = 2\frac{1}{2}x + 8$$

$$\text{V } y = -0,7x + 8$$

$$\text{II } y = 4x + 8$$

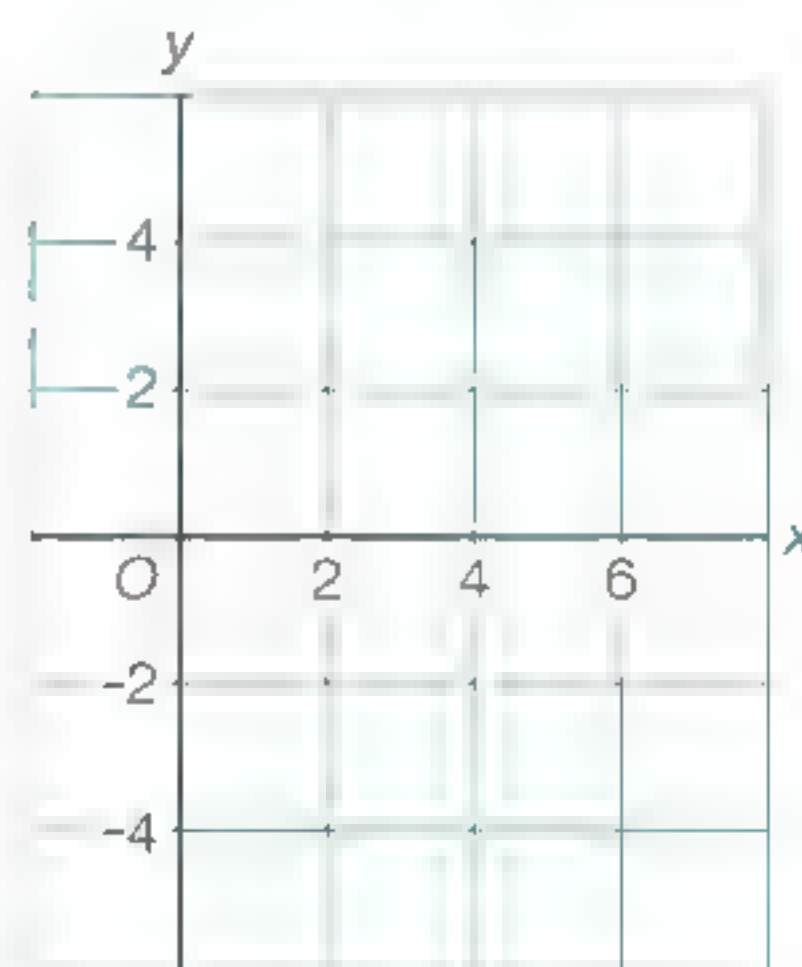
$$\text{IV } y = -0,7x + 1$$

$$\text{VI } y = -4x + 4$$

- a** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?
- b** Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de y -as?

9 Gegeven is de formule $y = -2\frac{1}{2}x + 4$.

- a** In welk punt snijdt de grafiek de y -as?
- b** Geef de richtingscoëfficiënt van de grafiek.
- c** Teken hiernaast de grafiek.



10 Gegeven zijn de formules

$$\text{I } y = 3x - 6$$

$$\text{IV } y = 1\frac{1}{2}x - 6$$

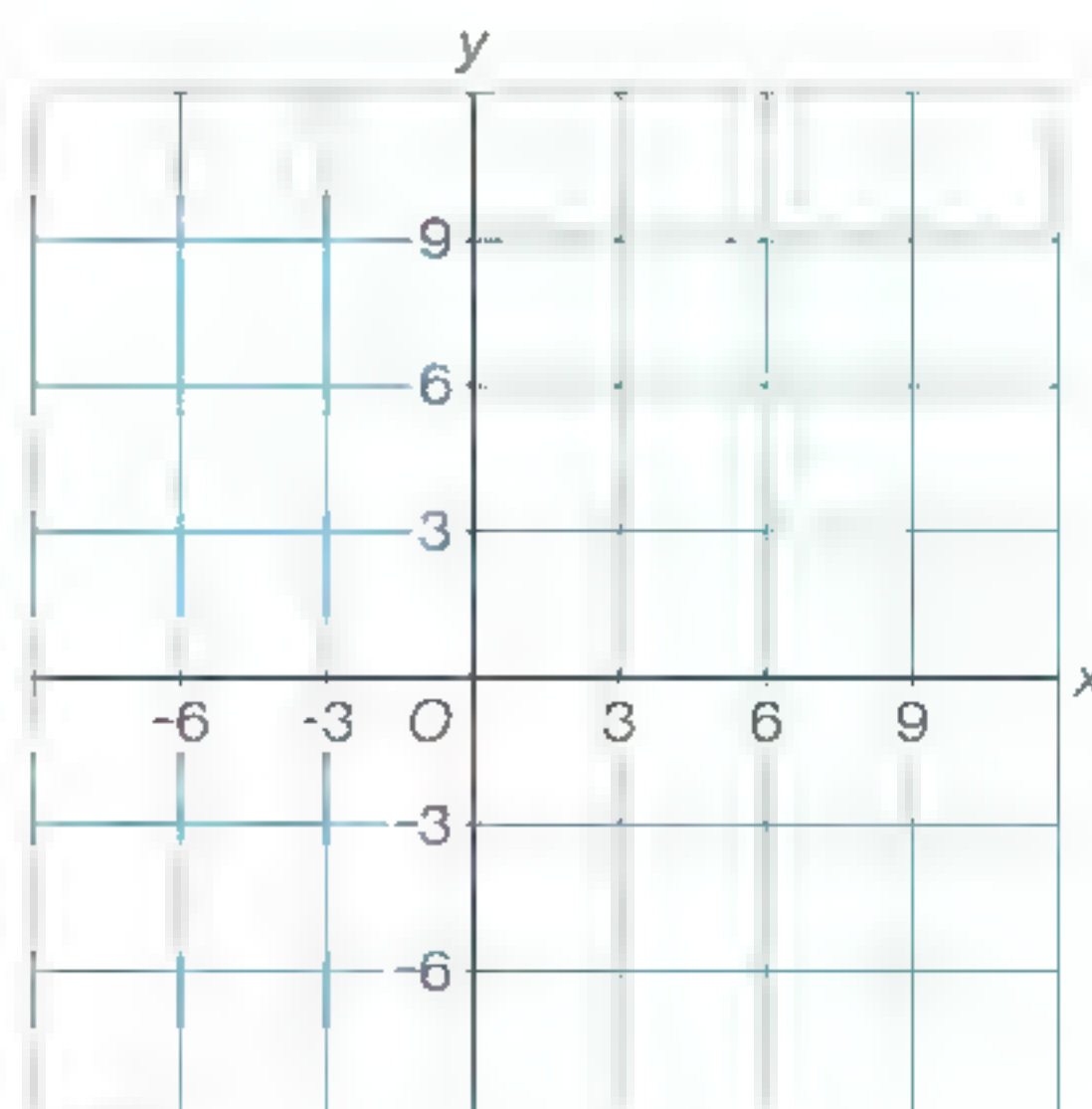
$$\text{II } y = 1\frac{1}{2}x + 8$$

$$\text{V } y = -3x + 3$$

$$\text{III } y = 3x + 3$$

$$\text{VI } y = 1\frac{1}{7}x + 3$$

- a** Van welke formules zijn de grafieken evenwijdig?
- b** Van welke formules hebben de grafieken hetzelfde snijpunt met de y -as?
- c** Teken de grafieken van de formules I, III en V in het assenstelsel hiernaast.



3.3 Formules opstellen en vergelijken

Tip 1 De formule van een lijn opstellen

Van een lijn door twee gegeven punten kun je de formule opstellen. Voor de lijn k in de figuur hiernaast zie je hieronder hoe dat gaat.

Je gaat uit van $y = ax + b$.

Je berekent a door twee roosterpunten op de lijn te zoeken.

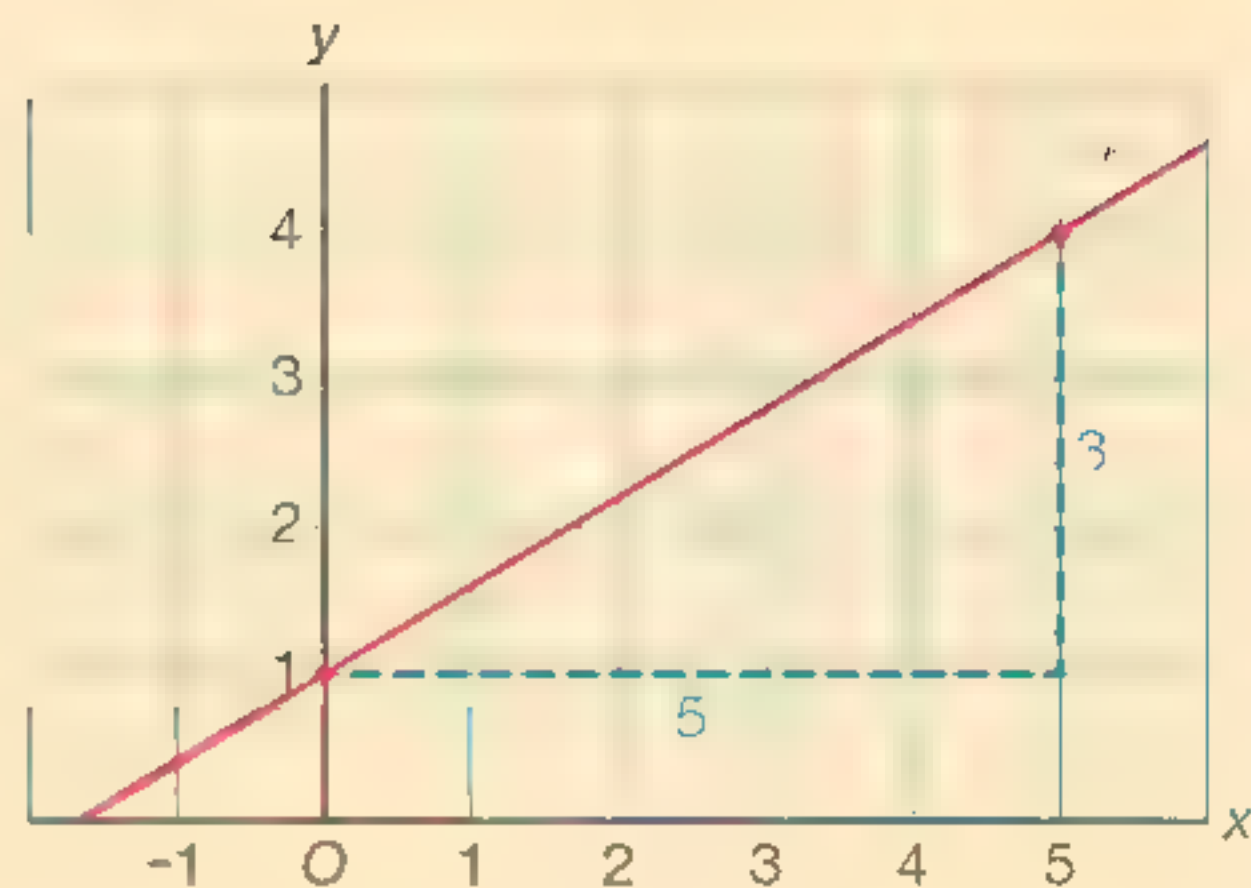
Dat zijn voor lijn k de punten $(0, 1)$ en $(5, 4)$.

Bereken a met $a = \frac{\text{toename verticaal}}{\text{toename horizontaal}}$.

Dus $a = \frac{3}{5}$.

De lijn k snijdt de y -as in het punt $(0, 1)$, dus $b = 1$.

Dus k heeft de formule $y = \frac{3}{5}x + 1$. Dit noteer je als $k: y = \frac{3}{5}x + 1$.



Werkschema: De formule van een lijn opstellen

1 Ga uit van $y = ax + b$.

2 Zoek twee roosterpunten op de lijn.

Daarmee bereken je a met $a = \frac{\text{toename verticaal}}{\text{toename horizontaal}}$.

3 Zoek het snijpunt van de lijn met de y -as. Daaruit volgt b .

4 Schrijf de formule op.

Voorbeeld

Stel de formule op van lijn m .

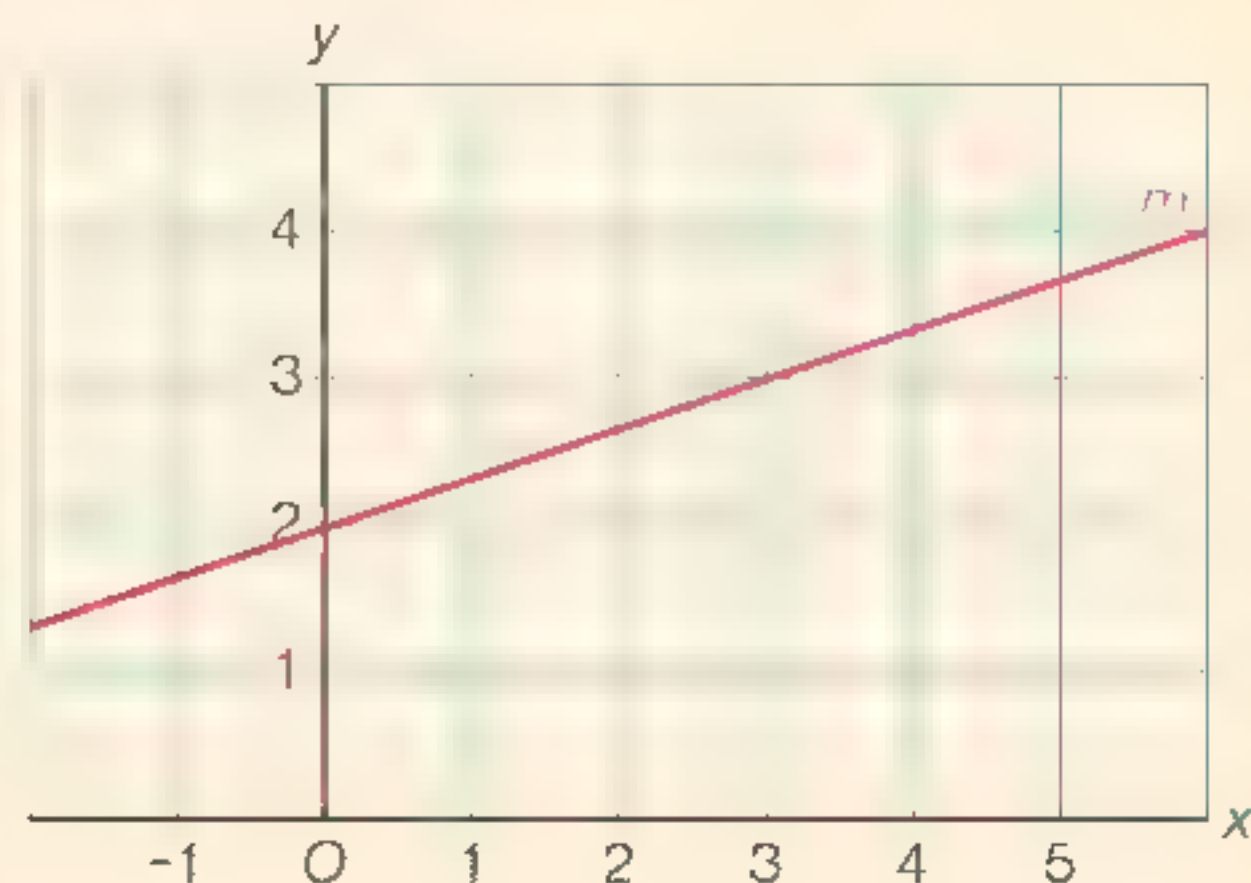
Uitwerking

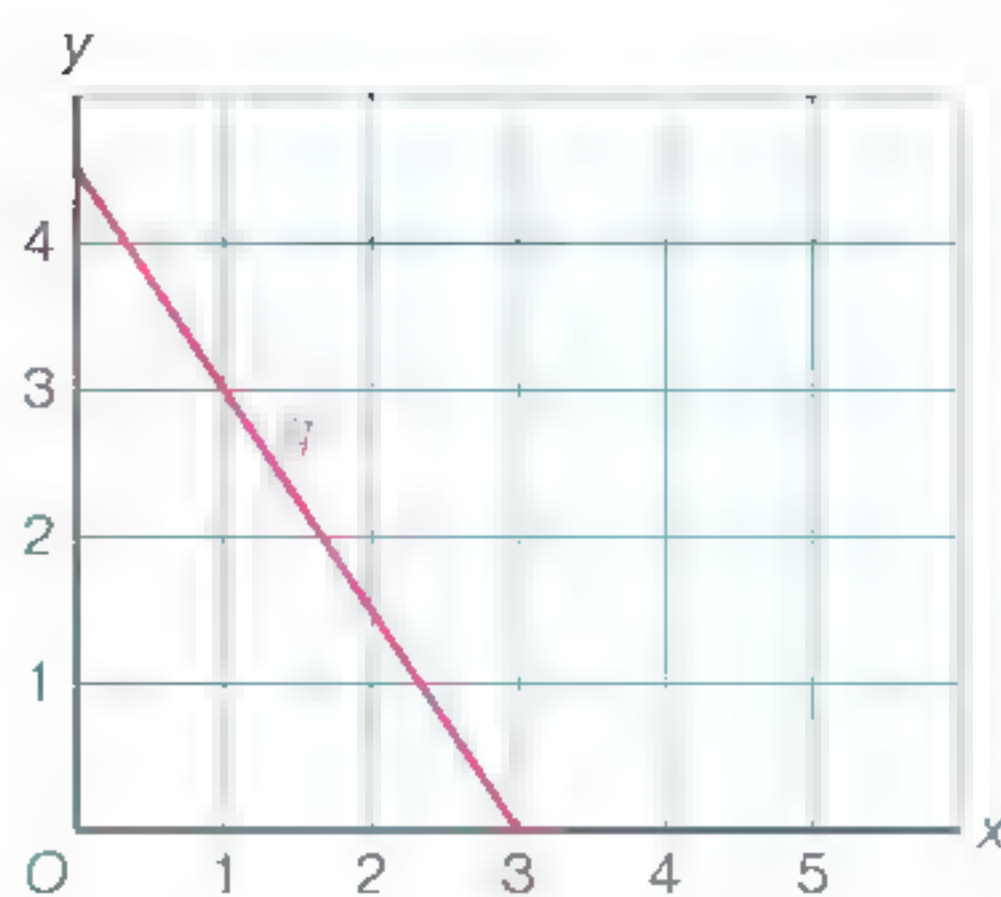
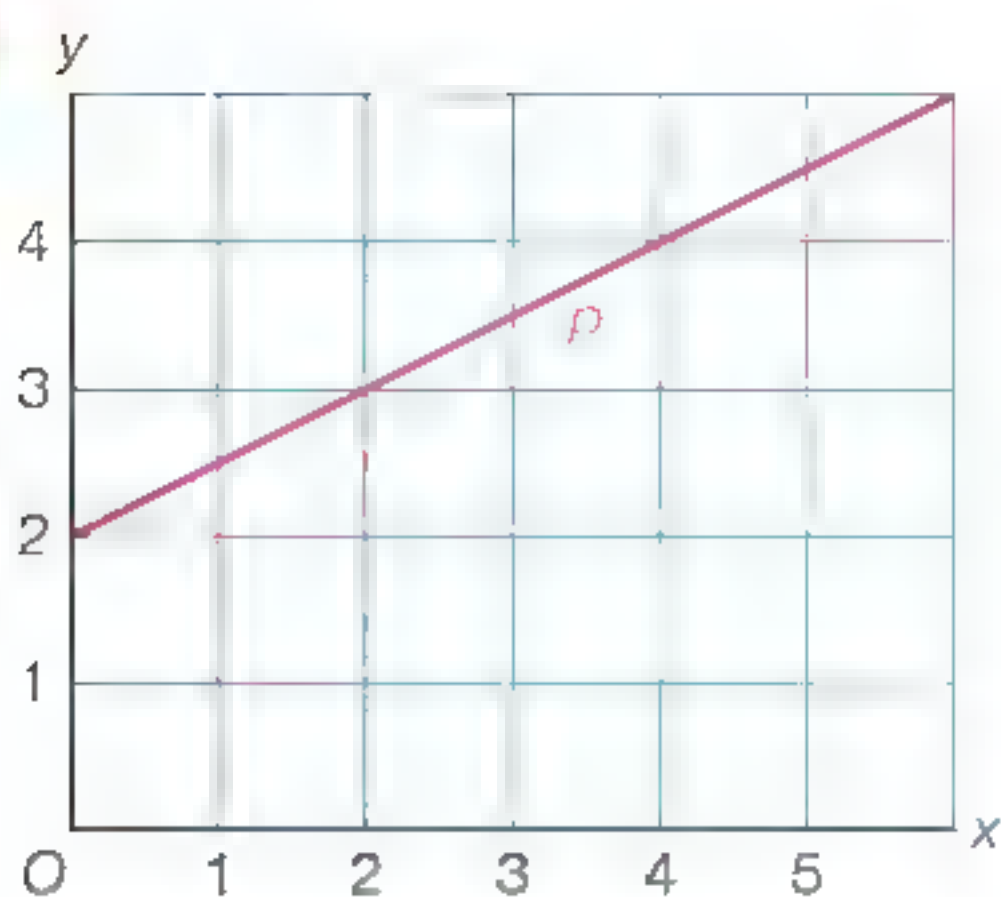
$$m: y = ax + b$$

Door $(0, 2)$ en $(3, 3)$, dus $a = \frac{1}{3}$.

$$b = 2$$

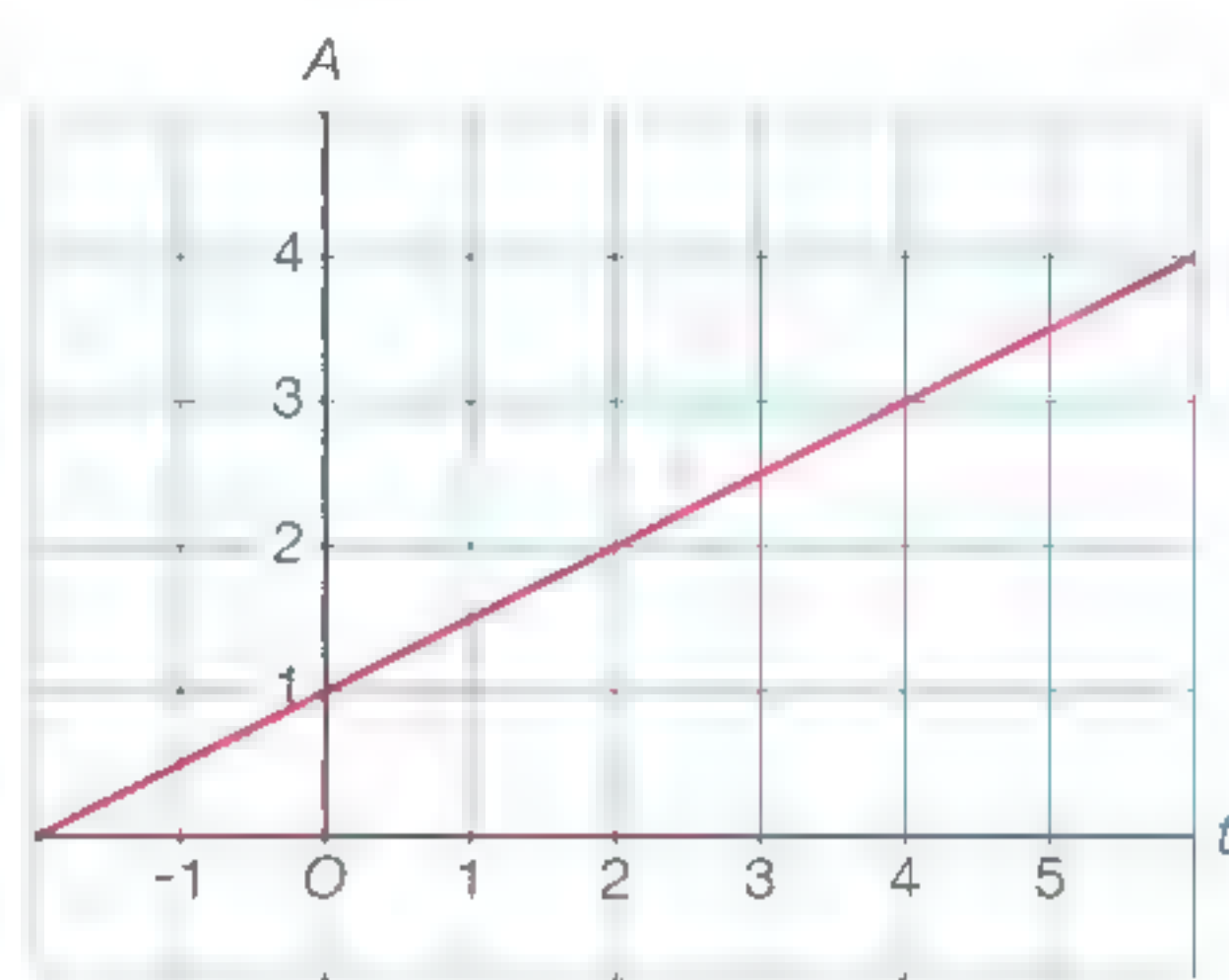
$$\text{Dus } m: y = \frac{1}{3}x + 2.$$



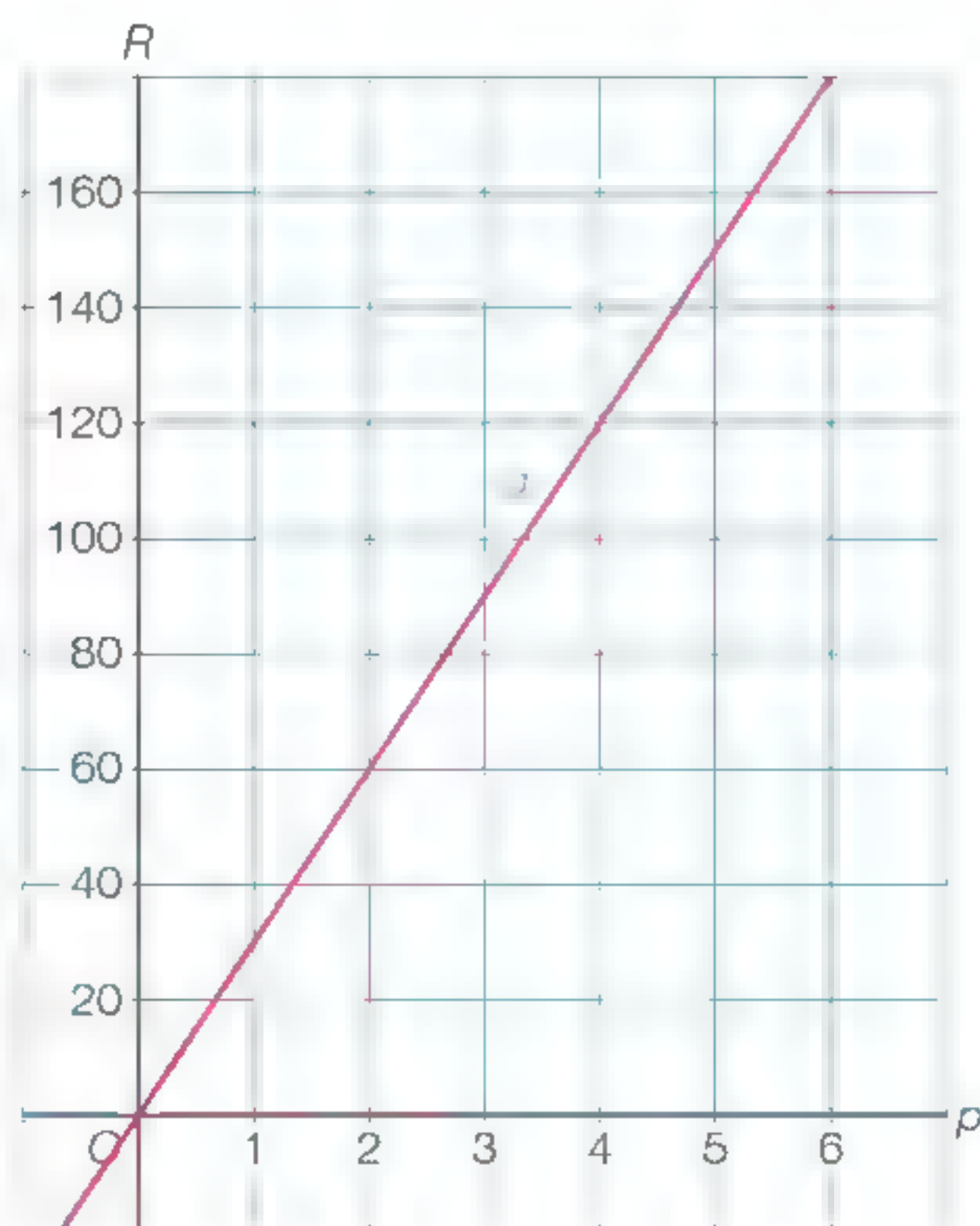
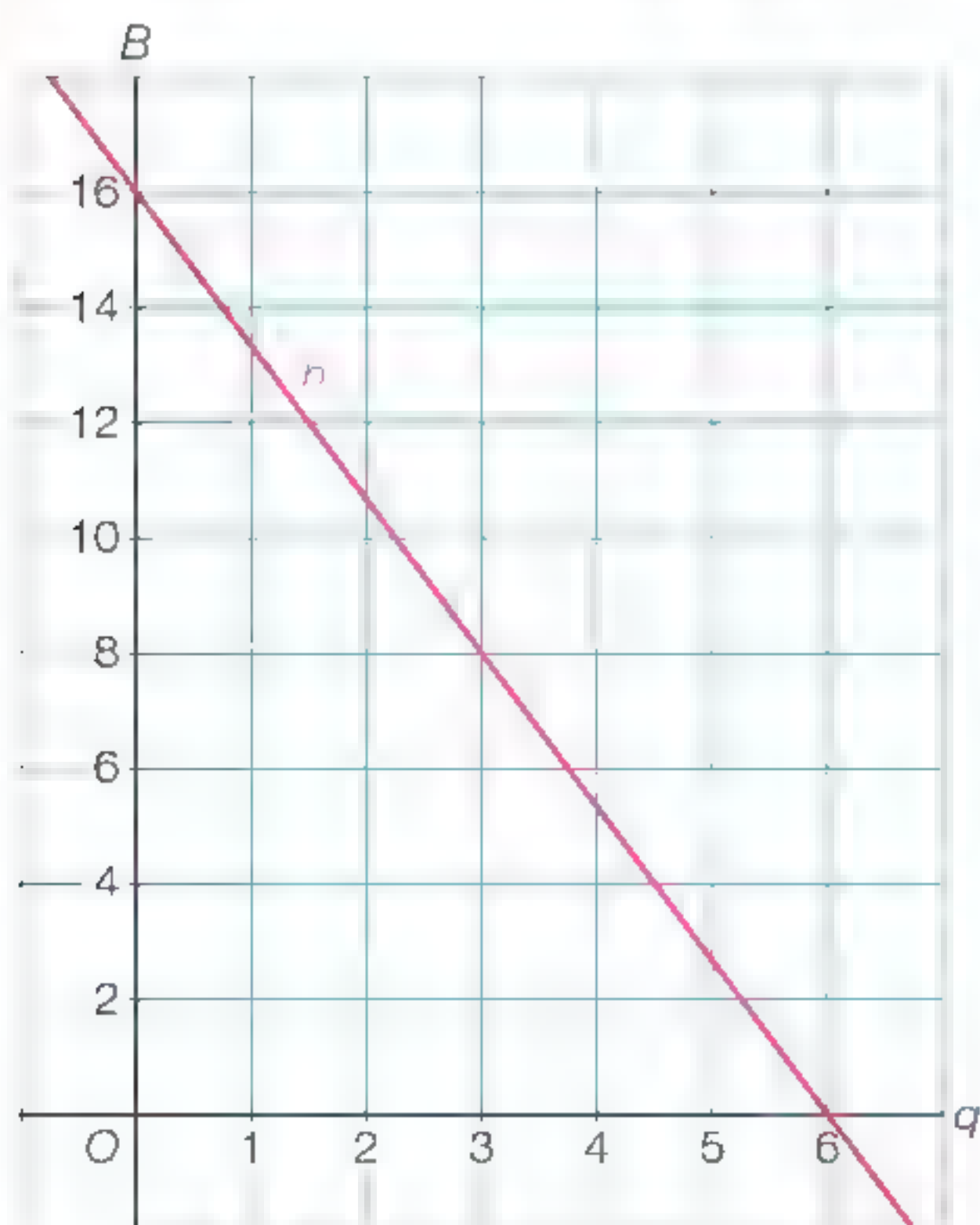


- Stel van lijn p de formule op.
- Stel de formule op van lijn q .

In het assenstelsel is de t -as de horizontale as en de A -as de verticale as. Daarom heeft lijn l een formule van de vorm $A = at + b$. Stel de formule op van l .



- Stel van lijn h de formule op.
- Stel de formule op van lijn g .



Thema 1 Coördinaten snijpunt berekenen

In de figuur bij het voorbeeld zie je de lijnen $l: y = 2x - 4$ en $m: y = x + 2$.

Je kunt de coördinaten van het snijpunt van deze lijnen berekenen.

Voorbeeld

Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $l: y = 2x - 4$ en $m: y = x + 2$.

Uitwerking

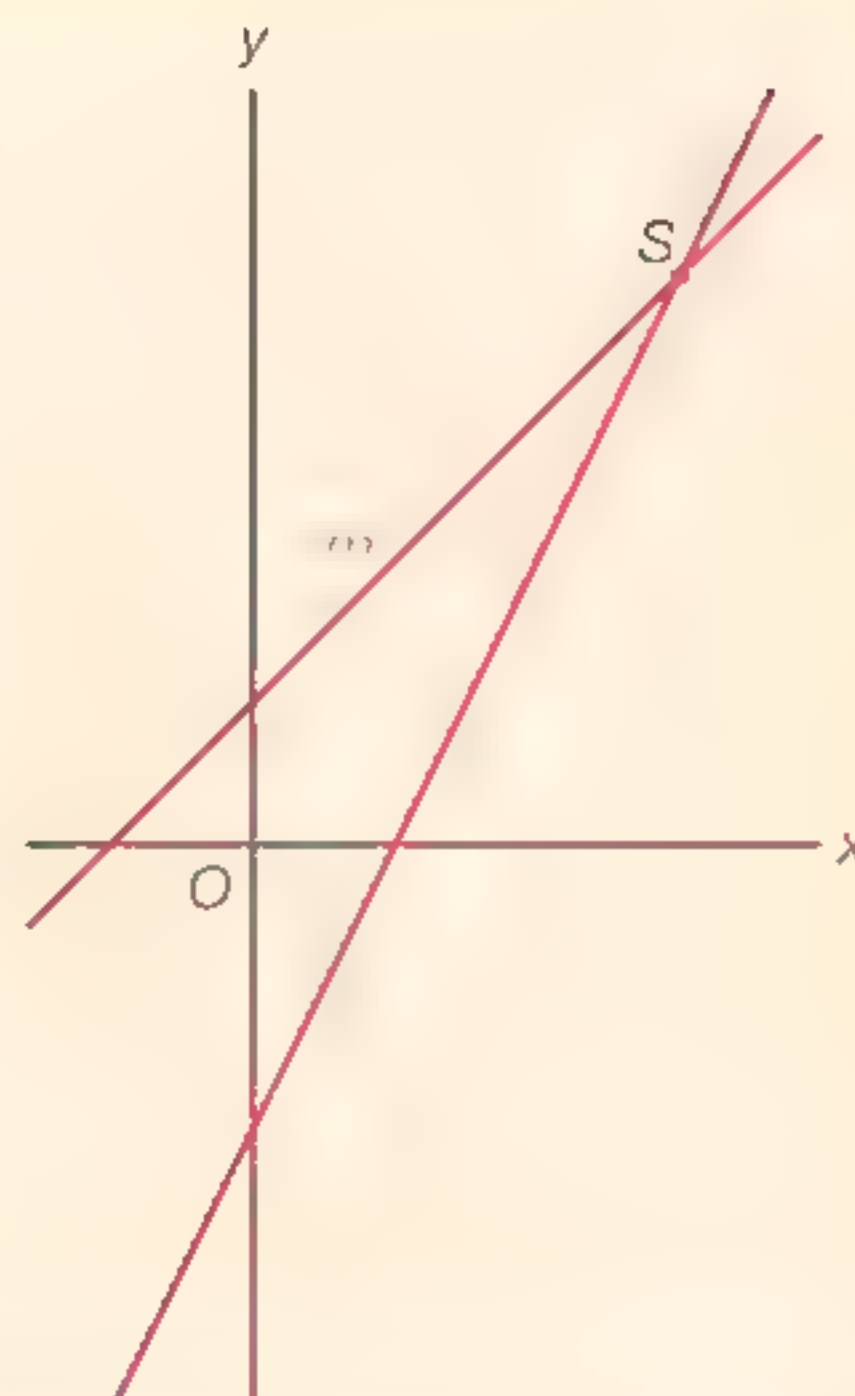
$$2x - 4 = x + 2$$

$$2x - x = 2 + 4$$

$$x = 6$$

$$x = 6 \text{ invullen in } y = x + 2 \text{ geeft } y = 6 + 2 = 8.$$

$$\text{Dus } S(6, 8).$$



- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $l: y = 4x + 3$ en $m: y = 3x - 1$.

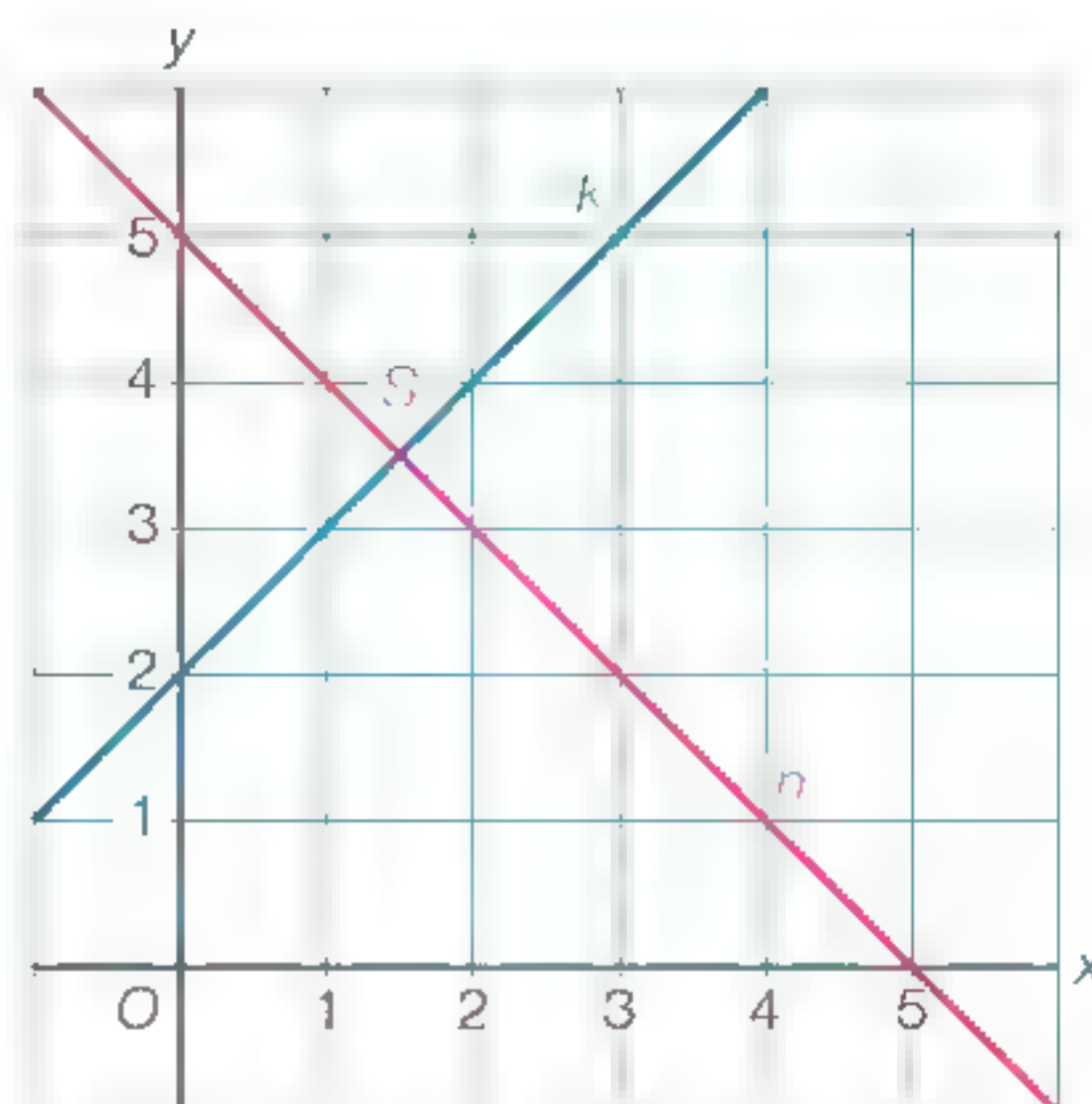
- Bereken de coördinaten van het snijpunt T van de lijnen $k: y = -3x + 3$ en $l: y = x - 9$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen $m: y = 5x - 1$ en $n: y = x - 17$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt T van de lijnen $a: y = -4x + 8$ en $b: y = -x - 7$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt P van de lijnen $l: y = x$ en $m: y = -\frac{1}{2}x - 6$.

- Bereken de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k en n in de figuur hiernaast.



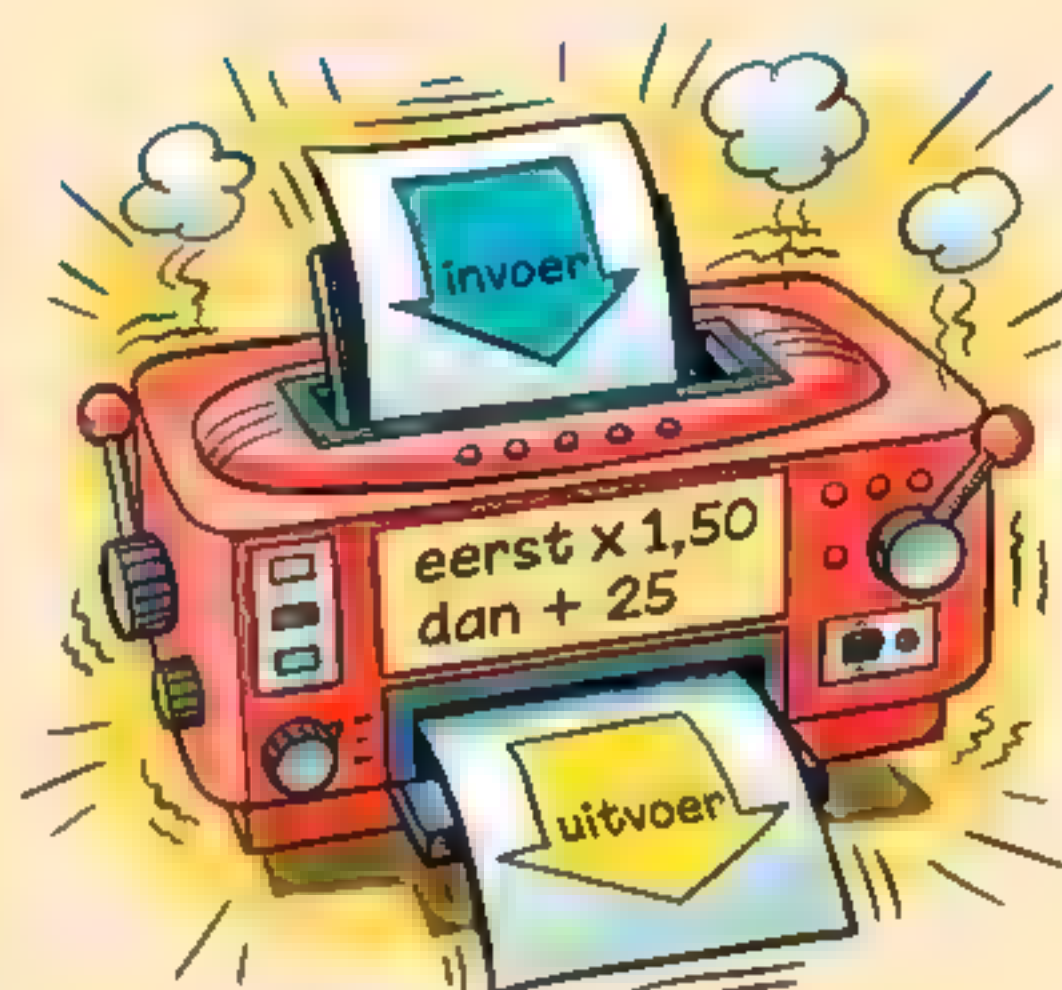
4 [HAVO-B/MBO] Lineaire functies

Theorie A Functies

Yasmine bezorgt maaltijden. Zij krijgt voor elke maaltijd die ze bezorgt € 1,50 en elke maand een vast bedrag van € 25. Als je weet hoeveel maaltijden Yasmine in een maand bezorgd heeft, reken je met een vast voorschrift uit hoeveel Yasmine verdiend heeft. Het aantal maaltijden wordt gebruikt als **invoer**.

Als Yasmine 20 maaltijden in een maand bezorgt, verdient zij $20 \times 1,50 + 25 = € 55$.

Na het toepassen van het voorschrift **eerst keer 1,50 en dan plus 25** komen de verdiensten eruit als **uitvoer**. Dit noemen we een **functie**.



Een functie maakt volgens een vast voorschrift van een invoer een ander getal, de uitvoer.

1 Farouk berekent zijn inkomen als volgt.

Hij krijgt € 6,50 per uur en € 12,50 als onkostenvergoeding.

- a** Neem als invoer 5 en bereken de uitvoer.
- b** Bereken de uitvoer die hoort bij de invoer 8.

2 Dorien werkt voor hetzelfde bedrijf als Farouk. Zij krijgt € 7,50 per uur en € 13,50 als onkostenvergoeding.

- a** Neem als invoer 8 en bereken de uitvoer.
- b** Bereken de uitvoer die hoort bij de invoer 12.

Theorie B Functievoorschrift

Een functie heeft meestal een naam. Vaak is dat de letter f , g , h of k .

De formule $y = 2x - 16$ komt op hetzelfde neer als de functie $f(x) = 2x - 16$.

Neem je als invoer 4 dan krijg je als uitvoer $2 \cdot 4 - 16 = -8$.

We zeggen: Bij de functie f is de **functiewaarde** van 4 gelijk aan -8 .

Notatie: $f(4) = -8$.

We noemen $f(x) = 2x - 16$ het **functievoorschrift** van de functie f .

Voorbeeld

De functies f en g hebben als functievoorschrift $f(x) = -3x + 6$ en $g(x) = 7x + 8$.

a Bereken $f(4)$ en $g(-9)$.

b De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.

Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

Uitwerking

a $f(4) = -3 \cdot 4 + 6 = -6$

$g(-9) = 7 \cdot -9 + 8 = -55$

b $h(x) = -3x + 6 + 7x + 8 = 4x + 14$

 Gegeven zijn de functies $f(x) = -5x - 10$ en $g(x) = -2x + 12$.

a Bereken $f(2)$, $f(-4)$ en $f(10)$.

b Bereken $g(-6)$, $g(-1)$ en $g(100)$.

c Bereken $f(4) + g(4)$.

d De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.

Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

 Gegeven zijn de functies $f(x) = -10x$ en $g(x) = 10 - 3x$.

a Bereken $f(2)$, $f(-5)$ en $f(12)$.

b Bereken $g(6)$, $g(-4)$ en $g(15)$.

c Bereken bij de functie g de functiewaarde van -15 .

d De functie h is gegeven door $h(x) = f(x) + g(x)$.

Stel het functievoorschrift van h op. Herleid je antwoord.

THEMA 5 De grafiek van een lineaire functie tekenen

Bij de functie $f(x) = 5x + 8$ hoort de formule $y = 5x + 8$.

Net als bij een formule kun je bij een functie een tabel maken en een grafiek tekenen.

De grafiek van $f(x) = 2x - 6$ is de lijn met formule $y = 2x - 6$.

Omdat $f(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$ ligt het punt $(5, 4)$ op de grafiek van f .

De functie $f(x) = 2x - 6$ is een voorbeeld van een **lineaire functie**.

**Een functie f van de vorm $f(x) = ax + b$ is een lineaire functie.
De grafiek van een lineaire functie is een lijn.**

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 1$.

- a** Teken de grafiek van f .
- b** Onderzoek of het punt $P(8, -15)$ op de grafiek van f ligt.
- c** Van het punt Q op de grafiek van f is de y -coördinaat $y_Q = -23$.
Bereken de x -coördinaat x_Q van Q .

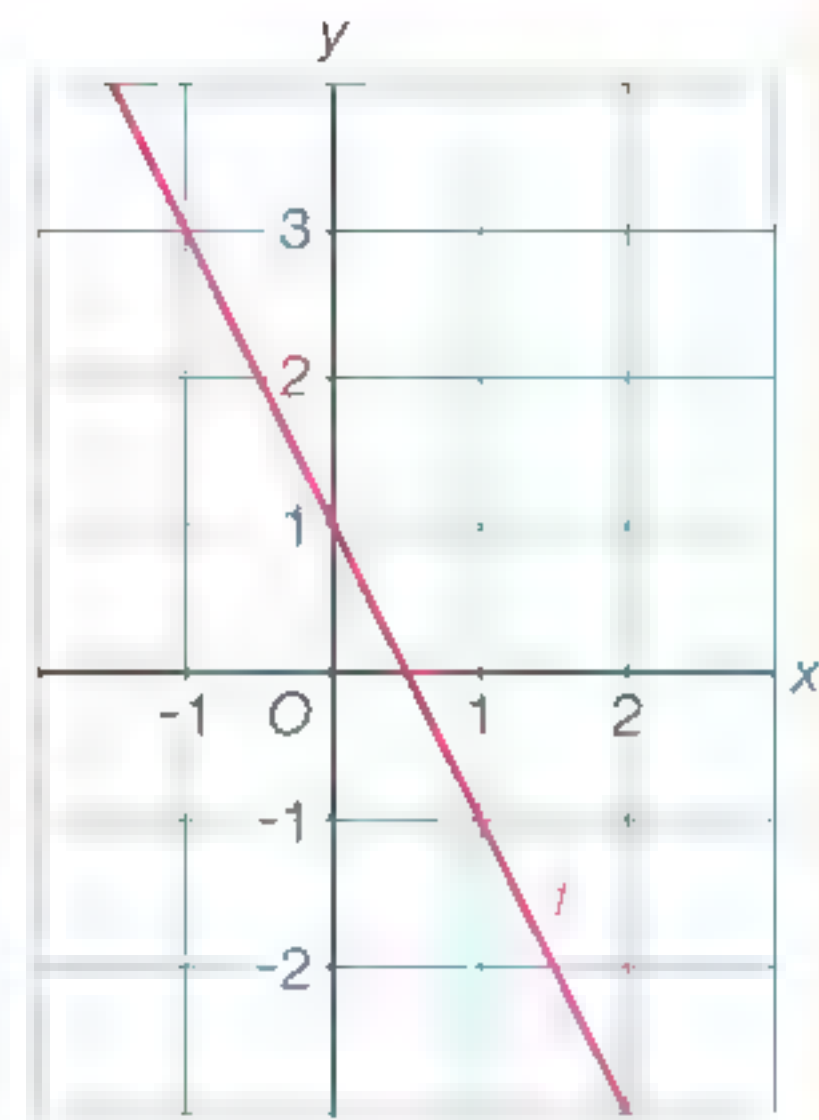
Uitwerking

a

x	0	2
$f(x)$	1	-3

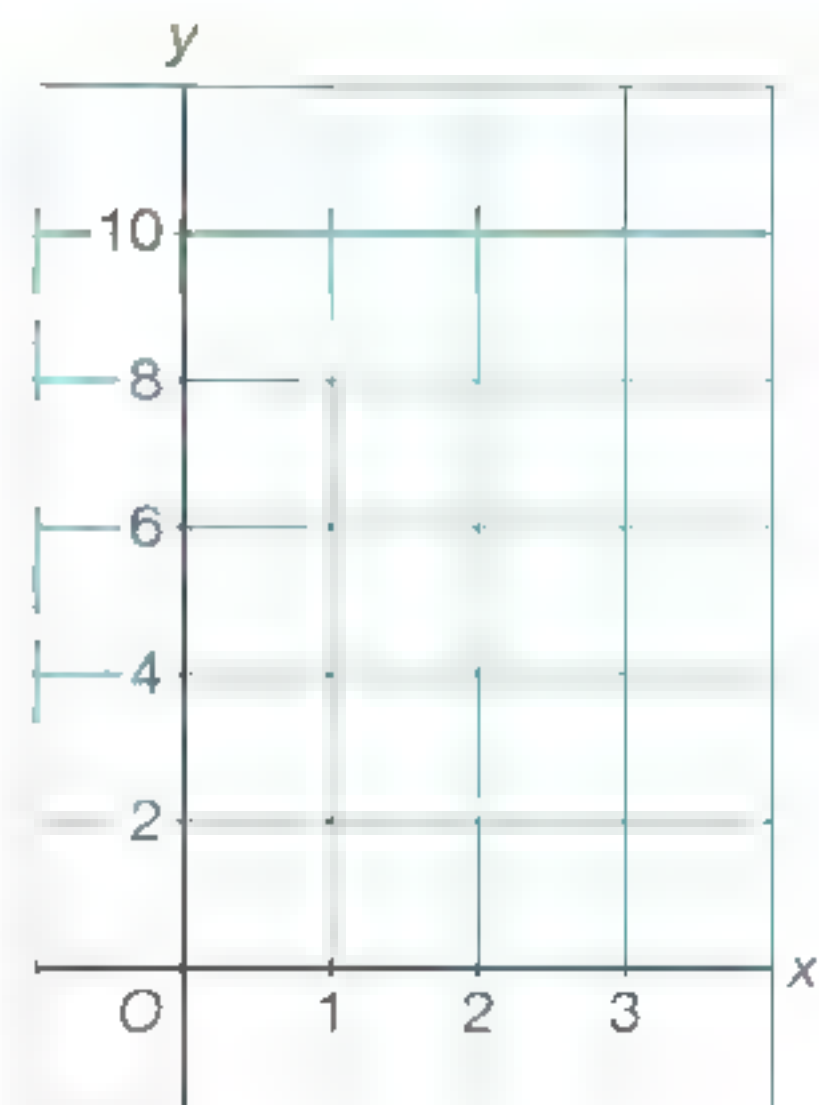
Zie de grafiek hiernaast.

- b** $f(8) = -2 \cdot 8 + 1 = -15$
Dus P ligt op de grafiek van f .
- c** $-2x + 1 = -23$
 $-2x = -23 - 1$
 $-2x = -24$
 $x = 12$
Dus $x_Q = 12$.



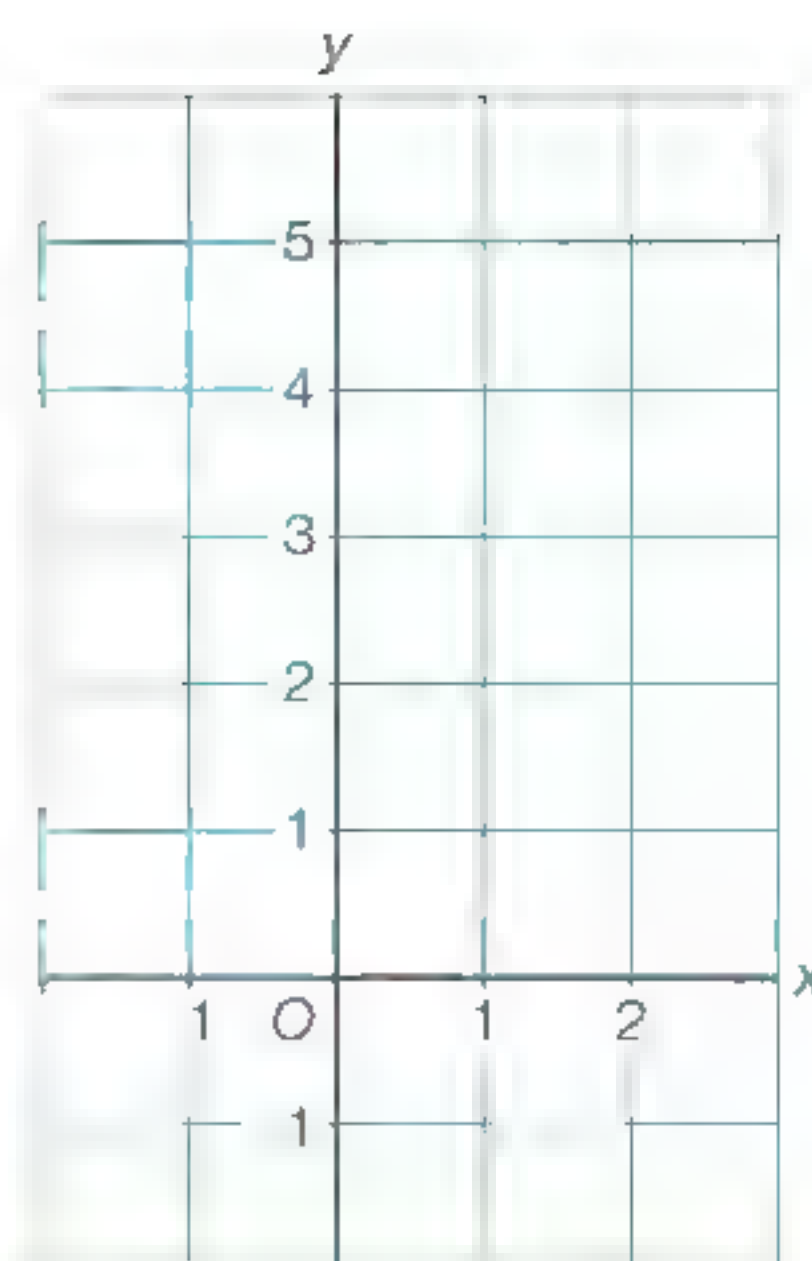
Gegeven is de functie $g(x) = 3x + 2$.

- a** Bereken $g(1)$ en $g(6)$.
- b** Teken hiernaast de grafiek van g .
- c** Onderzoek of het punt $Q(5, 17)$ op de grafiek van g ligt.
- d** Het punt R heeft een y -coördinaat van 29.
Bereken de x -coördinaat x_R van R .



G Gegeven zijn de functies $h(x) = 2x + 3$ en $k(x) = -4x + 2$.

- Teken in het assenstelsel hiernaast de grafieken van h en k .
- Bereken $h(-1\frac{1}{2})$.
- Bereken $k(\frac{1}{2})$.
- De functie g gegeven door $g(x) = h(x) + k(x)$. Stel het functievoorschrift van g op en herleid je antwoord tot de vorm $g(x) = ax + b$.



Thema 1 Snijpunten met de x-as en de y-as

Gegeven is de functie $f(x) = -4x + 6$.

De grafiek van f snijdt de y -as in het punt B .

Dus de x -coördinaat van B is 0.

De y -coördinaat volgt uit $y_B = f(0) = -4 \cdot 0 + 6 = 6$, dus $B(0, 6)$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A , dus de y -coördinaat van A is 0.

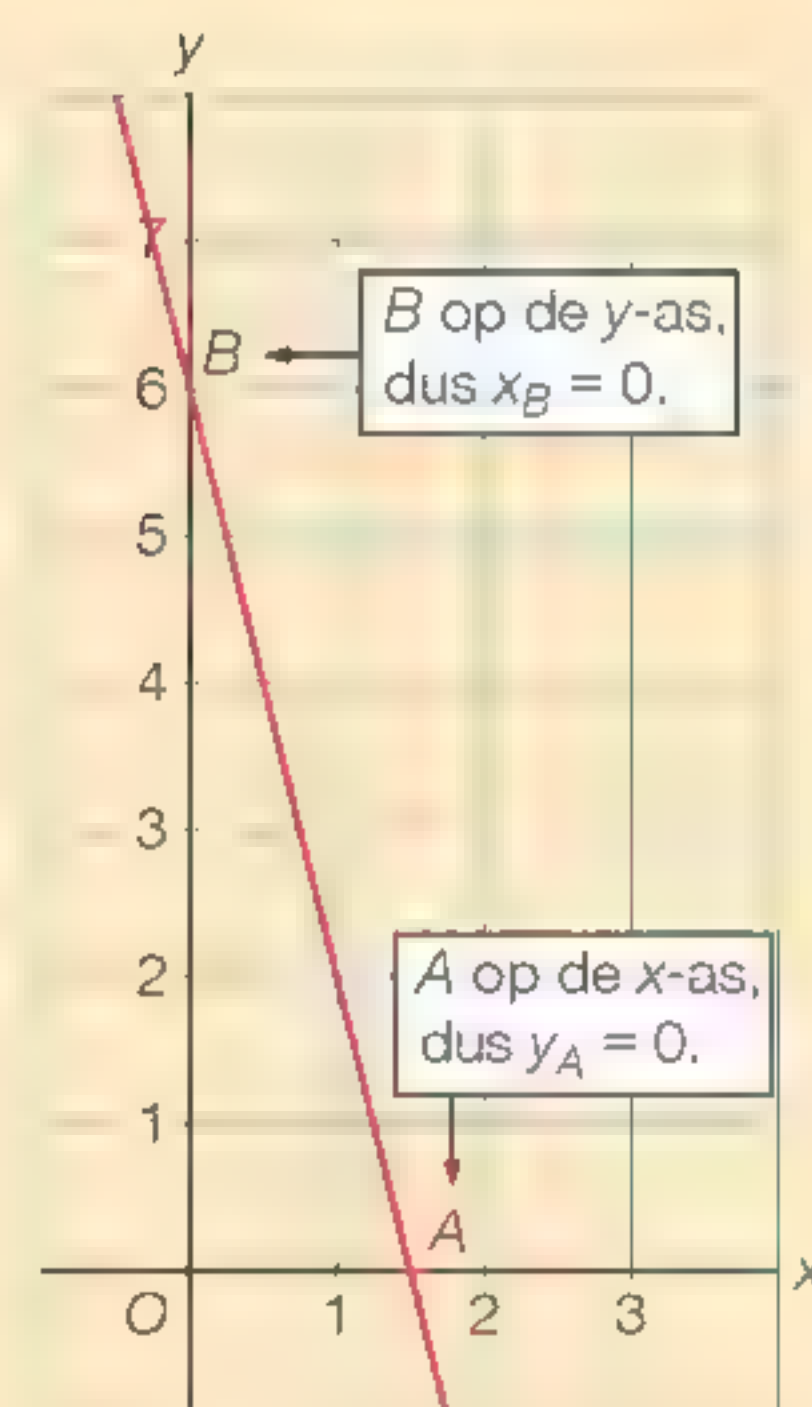
De x -coördinaat volgt uit $y_A = 0$, dus uit $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ geeft $-4x + 6 = 0$

$$-4x = -6$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

Dus $A(1\frac{1}{2}, 0)$.



Voor de grafiek van de functie f geldt

snijpunt met de x -as de y -coördinaat is 0

de x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$

snijpunt met de y -as de x -coördinaat is 0

de y -coördinaat volgt uit $f(0)$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -5x + 10$.

De grafiek van f snijdt de x -as in het punt A en de y -as in het punt B .

Bereken de coördinaten van A en B .

Uitwerking

$$f(x) = 0 \text{ geeft } -5x + 10 = 0$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2$$

Dus $A(2, 0)$.

$f(0) = 10$, dus $B(0, 10)$.

 Gegeven is de functie $f(x) = -2x + 8$.


De grafiek van f snijdt de x -as in het punt P en de y -as in het punt Q .

Bereken de coördinaten van P en Q .

 Gegeven is de functie $g(x) = -4x - 4$.

De grafiek van g snijdt de x -as in het punt S en de y -as in het punt T .

Bereken de coördinaten van S en T .

 Hiernaast zie je een schets van de grafieken van de functies $f(x) = 0,4x + 4$ en $g(x) = -1,6x + 5$.

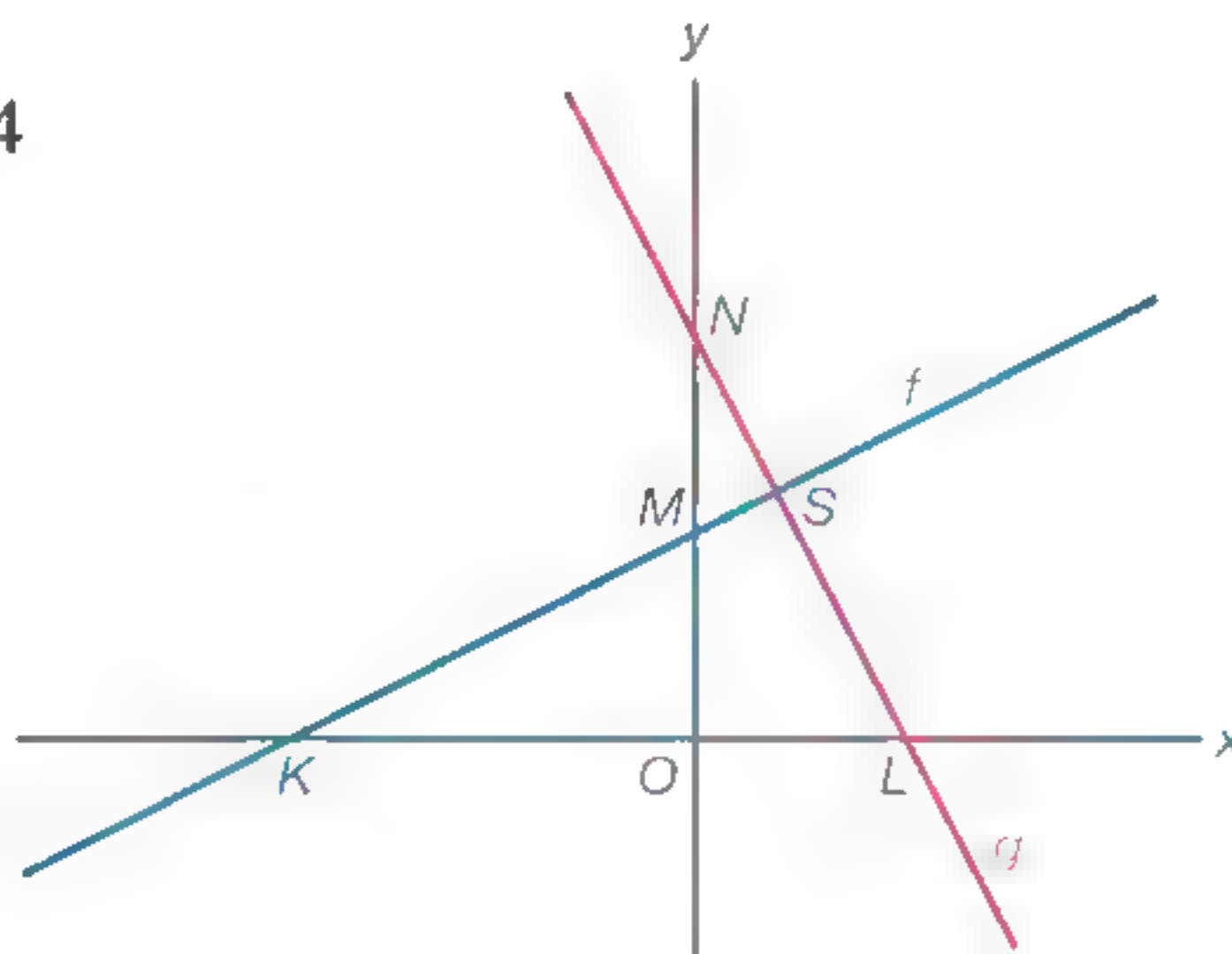
a Bereken de coördinaten van de punten K , L , M en N .

b Bereken de coördinaten van het snijpunt S .

c De functie h is gegeven door

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

Geef het functievoorschrift van h in de vorm $h(x) = ax + b$.



5 [HAVO-B] Lineaire vormen

5.1 Formules opstellen

Punt op een lijn

In het voorbeeld is gegeven dat het punt $A(3, -4)$ op lijn $m: y = -2x + b$ ligt. Je kunt dan b berekenen.


Voorbeeld

Het punt $A(3, -4)$ ligt op lijn $m: y = -2x + b$.
Bereken b en schrijf de formule van m op.

Uitwerking

$$\begin{array}{l} m: y = -2x + b \\ A(3, -4) \text{ op } m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = -4 \\ -6 + b = -4 \\ b = 2 \end{array} \right.$$


Dus $m: y = -2x + 2$.


 Het punt $A(-3, 5)$ ligt op lijn $l: y = 3x + b$.
Vul in.

$$\begin{array}{l} l: y = 3x + b \\ A(-3, 5) \text{ op } l \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot \quad + b = \\ \quad + b = \end{array} \right.$$

$$b =$$

Dus $l: y = 3x +$

 De lijn $m: y = -\frac{1}{2}x + b$ gaat door het punt $B(-4, 8)$.
Bereken b en schrijf de formule op.

 Het punt $Q(1, 3)$ ligt op lijn $p: y = -5x + b$.
Schrijf de formule op van p .

THEMA 8 Formule opstellen bij evenwijdige lijnen

De lijnen $p: y = 3x + 2$ en $q: y = 3x - 7$ zijn **evenwijdig** omdat ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, want $rc_p = rc_q = 3$. Dit gebruik je om de formule op te stellen van een lijn die evenwijdig is met een gegeven lijn.

Voorbeeld


De lijn l is evenwijdig met lijn $m: y = 7x - 3$ en gaat door het punt $D(2, 8)$. Stel de formule van l op.

Uitwerking

$l: y = ax + b$ is evenwijdig met m , dus $a = 7$.

$$\left. \begin{array}{l} l: y = 7x + b \\ D(2, 8) \text{ op } l \end{array} \right\} \begin{array}{l} 7 \cdot 2 + b = 8 \\ 14 + b = 8 \\ b = -6 \end{array}$$


Dus $l: y = 7x - 6$.


-  De lijn k is evenwijdig met lijn $l: y = 4x + 2$ en gaat door het punt $P(-3, 5)$. Vul in.


$k: y = ax + b$ is evenwijdig met, dus $a =$

$$\left. \begin{array}{l} k: y = \dots x + b \\ P(\dots, \dots) \text{ op } \dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dots \cdot \dots + b = \dots \\ \dots + b = \dots \\ b = \dots \end{array}$$

Dus $k:$

-  De lijn q gaat door het punt $S(6, -5)$ en is evenwijdig met de lijn $r: y = -1\frac{1}{2}x + 12$. Stel de formule van q op.

-  Stel de formule op van de lijn l die evenwijdig is met de lijn $m: y = 5x + 9$ en gaat door het punt $B(6, 13)$.

-  Stel de formule op van de lijn p die evenwijdig is met de lijn $q: y = -3x + 15$ en gaat door het punt $Q(-4, 7)$.

5.2 Lineaire ongelijkheden

Thema 1 Vergelijkingen met breuken

Komen in een vergelijking breuken voor, dan werk je eerst die breuken weg. Vermenigvuldig daarvoor alle termen met een geschikt getal.

Voorbeeld

Los op.

a $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x$

b $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{7}{10}x + 4$

Uitwerking

a $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x$ alles keer 6
 $3x + 6 = 2x$
 $3x - 2x = -6$
 $x = -6$

b $\frac{2}{5}x + 1 = \frac{7}{10}x + 4$ alles keer 10
 $4x + 10 = 7x + 40$
 $4x - 7x = 40 - 10$
 $-3x = 30$
 $x = -10$



Los op.

a $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 2$

d $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2$

b $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}a - 6$

e $\frac{2}{5}x + 2 = -\frac{3}{5}$

c $\frac{1}{5}y = -y + 6$

f $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{5}x + 5$

Thema 2 Lineaire ongelijkheden

Bij de firma FietsenMaar en de firma GoElectro kun je e-bikes huren. Voor de huurprijs van een e-bike hanteren de firma's de volgende formules.

FietsenMaar $h = 12t + 5$

GoElectro $h = 10t + 15$

Hierin is h de *huurprijs* in euro's en t de *tijd* in dagen.

Je kunt hierbij de vraag stellen:

Bij welk aantal dagen huren is FietsenMaar voordeliger dan GoElectro?

Je kunt ook vragen:

Voor welke t is $12t + 5 < 10t + 15$?

De vorm $12t + 5 < 10t + 15$ is een voorbeeld van een **lineaire ongelijkheid**.

Een lineaire ongelijkheid kun je oplossen door deze stap voor stap eenvoudiger te maken, net als bij lineaire vergelijkingen, namelijk:

$$12t + 5 < 10t + 15 \quad \text{termen met } t \text{ naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid}$$

$$12t - 10t < 15 - 5 \quad \text{termen samennemen}$$

$$2t < 10 \quad \text{deel links en rechts door het getal voor } t$$

$$t < 5$$

Dus firma FietsenMaar is bij minder dan vijf dagen huren voordeliger dan firma GoElectro.

Voorbeeld

Los op $6(a - 4) > 5(a - 3) + 5$.

Uitwerking

$$6(a - 4) > 5(a - 3) + 5$$

werk de haakjes weg

$$6a - 24 > 5a - 15 + 5$$

termen met a naar links, de rest naar rechts

$$6a - 5a > -15 + 5 + 24$$

herleid beide leden

$$a > 14$$



Los op.

a $5x - 10 < 4x + 6$

c $4(x - 1) > 5 - 3(2 - x)$

b $4q > 3(7 + q)$

d $2(a + 5) < a - 100$



Los op.

a $12(x - 6) > -3(x - 1)$

b $\frac{1}{5}x - 2 > \frac{1}{6}x + 3$

c $6(3p + 16) < 2p$

Thema C Het teken $>$ of $<$ omklappen

De ongelijkheid $5 < 6$ kun je op verschillende manieren bewerken.

$5 + 2 < 6 + 2$ Je kunt aan beide kanten iets optellen. De ongelijkheid klopt.

$5 - 2 < 6 - 2$ Je kunt van beide kanten iets afhalen. De ongelijkheid klopt.

$5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$ Je kunt beide kanten vermenigvuldigen met een positief getal. De ongelijkheid klopt.

$5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$ Je kunt beide kanten vermenigvuldigen met een negatief getal. De ongelijkheid klopt alleen als het teken omgeklapt wordt.

$5 : -2 > 6 : -2$ Je kunt beide kanten delen door een negatief getal.

De ongelijkheid klopt alleen als het teken omgeklapt wordt.

Je mag beide kanten van een ongelijkheid met hetzelfde getal vermenigvuldigen of door hetzelfde getal delen. Als dat getal negatief is, moet je **het ongelijkheidsteken < of > omklappen**.

Voorbeeld

Los op.

a $4x - 4 > 7x + 20$

b $2(x - 2) < 3(x - 1) + 1$

Uitwerking

a $4x - 4 > 7x + 20$

$4x - 7x > 20 + 4$

$-3x > 24$

$x < -8$

termen met x naar links, rest naar rechts

herleid beide leden

deel door -3 , dus het ongelijkheidsteken klapt om

b $2(x - 2) < 3(x - 1) + 1$

$2x - 4 < 3x - 3 + 1$

$2x - 3x < -3 + 1 + 4$

$-x < 2$

$x > -2$

werk de haakjes weg

termen met x naar links, rest naar rechts

termen samennemen

deel door -1 , dus het ongelijkheidsteken klapt om

 Vul in.

a $-3x < 18$

x -6

b $3x > -6$

x -2

c $-6x < 0$

x 0

 Los op.

a $7x + 8 > 11x + 20$

b $3(x - 2) > 5(x - 2)$

c $-3x < 2x - 5$

d $x - 3 < x - (2 + 2x)$

 Los op.

a $5x > 11x + 6$

b $\frac{1}{2}x < 2x + 9$

c $6 - 2(x - 3) < -(x - 8) + 1$

d $7x + 9 > 8(x - 2) + 6$

6 [HAVO-B/MB0] Algebra deel 2

6.1 Wortels

Thema 1 Het kwadraat van een wortel

Van een vierkant met oppervlakte 5 m^2 is de zijde $\sqrt{5} \text{ m}$, dus $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Het kwadraat van \sqrt{a} is a , dus $(\sqrt{a})^2 = a$.

Omdat $(ab)^2 = a^2b^2$ is $(3\sqrt{5})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$.
En zo is $(-5\sqrt{7})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 25 \cdot 7 = 175$, maar $-5(\sqrt{7})^2 = -5 \cdot 7 = -35$.

Bereken.

a $(3\sqrt{7})^2$

b $-2(\sqrt{6})^2$

Uitwerking

a $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$

b $-2(\sqrt{6})^2 = -2 \cdot 6 = -12$



Bereken.

a $(\sqrt{15})^2 =$ _____

c $(\sqrt{40})^2 =$ _____

b $-(\sqrt{21})^2 =$ _____

d $(3\sqrt{8})^2 =$ _____



Bereken.

a $(-3\sqrt{7})^2 =$ _____

b $-5\sqrt{25} - 4(\sqrt{3})^2 =$ _____

c $-7(\sqrt{2})^2 =$ _____

d $(\sqrt{12})^2 - 2^2 =$ _____

Thema 1.1 Gelijksoortige wortels

Zoals je $5p + 4p$ kunt herleiden tot $9p$, kun je

$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ herleiden tot $7\sqrt{3}$.

We noemen $2\sqrt{3}$ en $5\sqrt{3}$ **gelijksoortige wortels**.

Wortels zoals $2\sqrt{3}$ en $3\sqrt{5}$ zijn niet gelijksoortig.

Je kunt $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ niet herleiden.

Ook $7 + \sqrt{3}$ kun je niet herleiden.

De som van gelijksoortige wortels kun je herleiden.

Zo is $6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$ en $\sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$.

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

c $3\sqrt{3} + \sqrt{6}$

b $9\sqrt{10} - 5\sqrt{10}$

d $\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

Uitwerking

a $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c $3\sqrt{3} + \sqrt{6}$ kan niet

b $9\sqrt{10} - 5\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$

d $\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $3\sqrt{13} + \sqrt{13}$

e $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

b $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

f $\sqrt{23} + \sqrt{23}$

c $7\sqrt{15} + 4\sqrt{15}$

g $3\sqrt{11} + 3\sqrt{11}$

d $2\sqrt{2} - 11\sqrt{3}$

h $2\sqrt{6} - 5$

Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $5\sqrt{8} + 12\sqrt{8}$

d $9\sqrt{20} - 11\sqrt{20}$

b $(-2\sqrt{12})^2$

e $(\sqrt{17})^2 - 4^2$

c $5\sqrt{15} - 4\sqrt{15}$

f $5\sqrt{13} - 12\sqrt{3}$

Thema 1.5 Wortels vermenigvuldigen

Voor het vermenigvuldigen van wortels geldt de volgende regel.

$$\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{pq}$$

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}$ en
 $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$.

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 3 = 15 \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{21} \\ 5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7} = 15\sqrt{21} \end{array}$$

Afspraak

Bij het herleiden laat je wortels zoals $\sqrt{11}$ en $24\sqrt{10}$ in het antwoord staan.

Maar wortels als $3\sqrt{4}$ herleid je, want $3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

Herleid.

a $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3}$

c $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

b $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$

d $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

Uitwerking

a $3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{6}$

b $4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{4} = 4 \cdot 2 = 8$

c $3\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 3\sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$

d $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$

 Herleid.

a $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} =$

b $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} =$

c $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

d $8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} =$

e $2\sqrt{11} \cdot 9\sqrt{11} =$

f $-12 \cdot 4\sqrt{13} =$



Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $6\sqrt{3} - 7\sqrt{3}$ _____

d $6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{5}$ _____

b $12\sqrt{17} + 17$ _____

e $9\sqrt{13} - 3\sqrt{13}$ _____

c $2(-5\sqrt{3})^2$ _____

f $-3\sqrt{36} + 2(\sqrt{7})^2$ _____

Factor voor het wortelteken brengen

Wortels zoals $\sqrt{4}$ en $\sqrt{36}$ kun je herleiden omdat er onder het wortelteken een kwadraat staat. Maar ook wortels zoals $\sqrt{20}$ kun je herleiden.

Je gebruikt hierbij dat $20 = 4 \cdot 5$, dus $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.
En zo is $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

We zeggen dat er een **factor voor het wortelteken** is gebracht.

Om een factor voor het wortelteken te brengen, heb je een kwadraat nodig.

Bij $\sqrt{30}$ lukt het niet om een factor voor het wortelteken te brengen, want $30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ en bij de factoren 2, 3, 5, 6, 10 en 15 zit geen kwadraat.

Soms zijn er meerdere mogelijkheden om een factor voor het wortelteken te brengen, zoals bij $\sqrt{32}$.

$32 = 4 \cdot 8$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{8}$, maar ook is

$32 = 16 \cdot 2$, dus $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

In het laatste geval is *een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken gebracht*.

Afspraak

Bij de opdracht *herleid* breng je een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken.

Voorbeeld

Herleid.

a $\sqrt{175}$

b $\sqrt{44}$

c $\sqrt{80}$

Uitwerking

a $\sqrt{175} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b $\sqrt{44} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

c $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$



Herleid.

a $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} =$ _____

b $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} =$ _____

c $\sqrt{150} =$ _____

d $\sqrt{54} =$ _____

e $\sqrt{63} =$ _____

f $\sqrt{72} =$ _____



Herleid zo mogelijk. Zet anders *kan niet*.

a $\sqrt{45}$ _____

b $(3\sqrt{11})^2$ _____

c $8\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ _____

d $12\sqrt{17} - 5\sqrt{7}$ _____

e $7\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{7}$ _____

f $\sqrt{108}$ _____

g $-3\sqrt{49} + 2(\sqrt{6})^2$ _____

h $5\sqrt{16} - 3\sqrt{9}$ _____

i $9 + (2\sqrt{15})^2 - 4^2$ _____

j $5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{24}$ _____

k $14\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ _____

l $\sqrt{27}$ _____

m $3(\sqrt{5})^2 - \sqrt{81}$ _____

n $-4\sqrt{16} + (\sqrt{16})^2$ _____

6.2 Merkwaardige producten

Thema 6.2 Het merkwaardige product $(a + b)(a - b)$

Bij het herleiden van het product $(a + b)(a - b)$ gebeurt iets merkwaardigs. Er blijven maar twee termen over. Kijk maar.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Dus $(a + 4)(a - 4) = a^2 - 4^2 = a^2 - 16$.

Je mag bij het herleiden van een merkwaardige product het antwoord in één keer opschrijven. Zo is $(c - 3)(c + 3) = c^2 - 9$ en $(5x + 9)(5x - 9) = 25x^2 - 81$.

Het kwadraat van $5x$ is $(5x)^2 = 5x \cdot 5x = 25x^2$.



Herleid

a $(x + y)(x - y) =$ _____

d $(3a + 2)(3a - 2) =$ _____

b $(a + 7)(a - 7) =$ _____

e $(5x - 6)(5x + 6) =$ _____

c $(b - 9)(b + 9) =$ _____

f $(8y + 1)(8y - 1) =$ _____

Thema 6.2 De merkwaardige producten $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$

Bij het herleiden van $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ houd je in het antwoord drie termen over.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2, \text{ dus}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2, \text{ dus}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Omdat ab het product is van a en b heet $2ab$ het **dubbelproduct** van a en b .

Merkwaardige producten

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ook bij het herleiden van de merkwaardige producten $(a + b)^2$ en $(a - b)^2$ laat je de tussenstappen weg. Je schrijft je antwoord in één keer op.

$$(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$$

Het dubbelproduct van a en 4 is $2 \cdot a \cdot 4 = 8a$.

voorbeeld

Herleid.

a $(a - 5)^2$

b $(3x + 6)^2$

c $(3a - 4b)^2$

Uitwerking

a $(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$ het dubbelproduct van a en 5 is $2 \cdot a \cdot 5 = 10a$

b $(3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ $(3x)^2 = 9x^2$ en $2 \cdot 3x \cdot 6 = 36x$

c $(3a - 4b)^2 = 9a^2 - 24ab + 16b^2$
 $(3a)^2 = 9a^2$, $2 \cdot 3a \cdot 4b = 24ab$ en $(-4b)^2 = 16b^2$



Herleid.

a $(p + 5)^2 =$

g $(a + 9)^2 =$

b $(q - 4)^2 =$

h $(b + 4)^2 =$

c $(x - 1)^2 =$

i $(7x + 4y)^2 =$

d $(b + 7)^2 =$

j $(f - 1)^2 =$

e $(e - 3)^2 =$

k $(3c + 8)^2 =$

f $(y + 10)^2 =$

l $(5g - 3)^2 =$



Herleid.

a $(4x + 9)^2 =$

e $(3 - 5a)^2 =$

b $(8x - 3)^2 =$

f $(x + 4y)^2 =$

c $(7a + 2b)^2 =$

g $(8x - y)(8x + y) =$

d $(5a + 1)(5a - 1) =$

h $(p - 5q)(p + 5q) =$

6.3 Ontbinden in factoren

Tip: Ontbinden in factoren

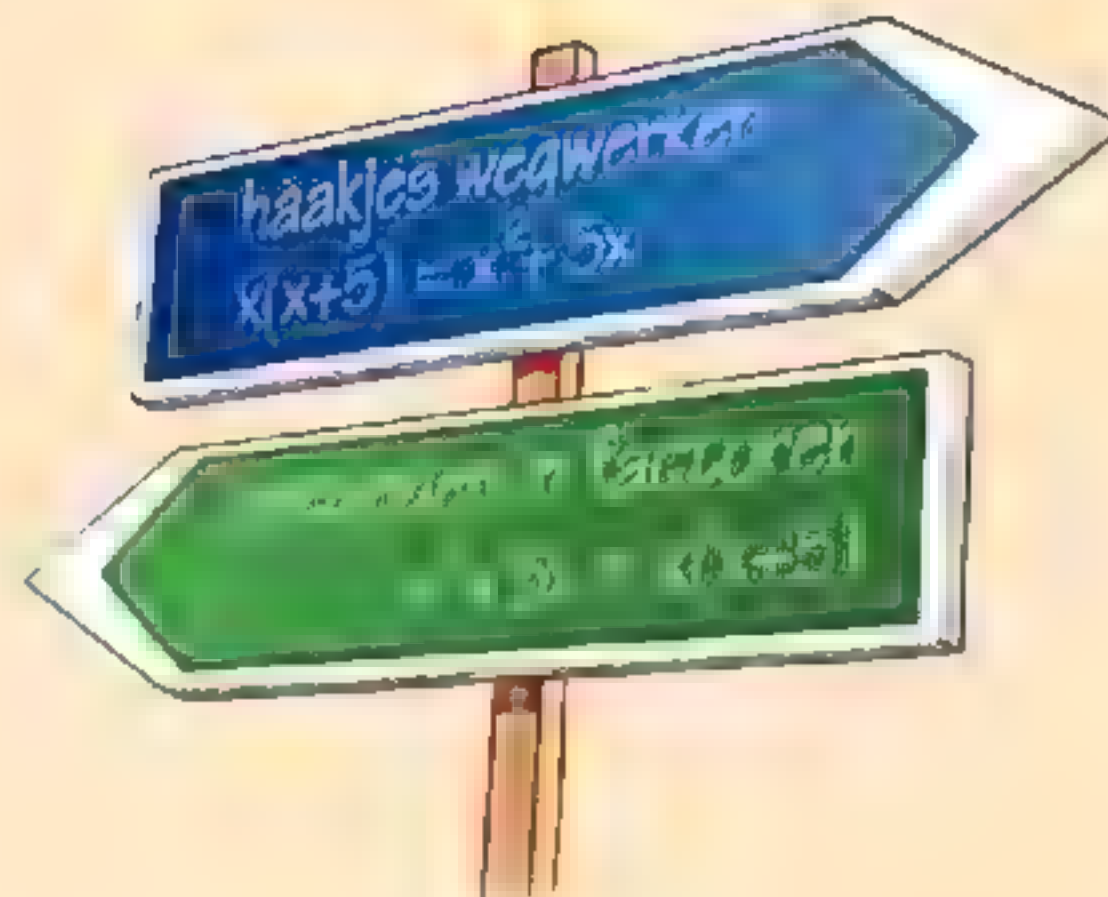
Bij de herleiding $x(x + 7) = x^2 + 7x$ maak je van het **product** $x(x + 7)$ de **som** $x^2 + 7x$.

factoren
 x en $x + 7$

termen
 x^2 en $7x$

Het omgekeerde kan ook. Je schrijft de som $x^2 + 7x$ als het product $x(x + 7)$.

Schrijven als een product heet **ontbinden in factoren**.



Ontbinden in factoren betekent schrijven als een product.

Bij $x^2 + 7x = x(x + 7)$ is de factor x buiten haakjes gebracht. Dat kan omdat x een factor is van x^2 en ook van $7x$. Daarom heet x de **gemeenschappelijke factor** van x^2 en $7x$.

$$\begin{aligned} x^2 &= x \cdot x \\ 7x &= 7 \cdot x \end{aligned}$$

gemeenschappelijke factor x

Ook $15ab + 6c$ is te ontbinden in factoren. Van $15ab$ en $6c$ is 3 de gemeenschappelijke factor. Daarom breng je 3 buiten haakjes. Je krijgt $15ab + 6c = 3(5ab + 2c)$.

$$\begin{aligned} 15ab &= 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \\ 6c &= 2 \cdot 3 \cdot c \end{aligned}$$

gemeenschappelijke factor 3

Je ontbindt $2x^2 - 7x$ in factoren door de gemeenschappelijke factor x buiten haakjes te brengen. Je krijgt $2x^2 - 7x = x(2x - 7)$.

Voorbeeld

Ontbind in factoren.

a $6a + 10b$

b $2ab - b$

$$\begin{aligned} 6a &= 2 \cdot 3 \cdot a \\ 10b &= 2 \cdot 5 \cdot b \end{aligned}$$

gemeenschappelijke factor 2

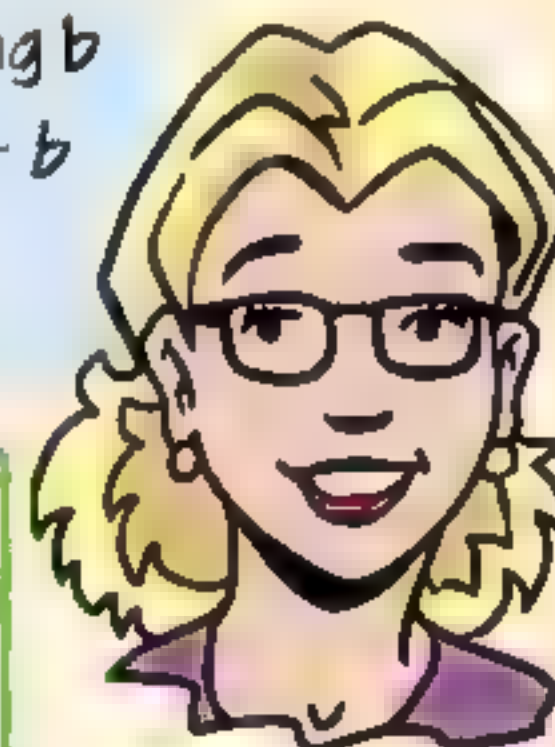
$$\begin{aligned} 2ab &= 2 \cdot a \cdot b \\ b &= 1 \cdot b \end{aligned}$$

gemeenschappelijke factor b

Controle van vraag b

$$b(2a - 1) = 2ab - b$$

Klopt!



Uitwerking

a $6a + 10b = 2(3a + 5b)$

b $2ab - b = b(2a - 1)$

12 Ontbind in factoren.

a $2x + 8y =$ _____

b $4a - ab =$ _____

c $x^2 + 20x =$ _____

d $4p - 6 =$ _____

e $pq + 3pr =$ _____

f $x^2 - 9x =$ _____

g $xy - 3yz =$ _____

h $3a - abc =$ _____

i $12p - 8q =$ _____

j $18x^2 + 9yz =$ _____

Tip 12.1 Zo veel mogelijk factoren buiten haakjes brengen

Soms is er meer dan één gemeenschappelijke factor, zoals bij $6pq - 30p$.

Je kunt dan op verschillende manieren ontbinden in factoren.

Met $6pq - 30p = 6p(q - 5)$ heb je alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes gebracht.

Afspraak

Bij de opdracht *ontbind in factoren* breng je alle gemeenschappelijke factoren buiten haakjes.

Ontbind in factoren.

a $3xy + 21x$

b $15x^2 - 30x$

Uitwerking

a $3xy + 21x = 3x(y + 7)$

$$\left. \begin{array}{l} 3xy = \boxed{3} \cdot \boxed{x} \cdot y \\ 21x = \boxed{3} \cdot 7 \cdot \boxed{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot x, \text{ dus } 3x \\ \text{buiten haakjes brengen} \end{array}$$

b $15x^2 - 30x = 15x(x - 2)$

$$\left. \begin{array}{l} 15x^2 = \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{x} \cdot x \\ 30x = 2 \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{x} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 5 \cdot x, \text{ dus } 15x \\ \text{buiten haakjes brengen} \end{array}$$

13 Ontbind in factoren.

a $2ab - 6bc =$ _____

b $12p + 8q =$ _____

c $9x^2 + 3x =$ _____

d $18xy - 12y =$ _____

e $6x^2 - 12x =$ _____

f $c^2 + c =$ _____

g $a^2b - 2b =$ _____

h $2x^2 - 2x =$ _____

THEMA 1 Product-som-methode

Je weet $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$.

$$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$$

8 is de som
van 3 en 5

15 is het product
van 3 en 5

Omgekeerd kun je $x^2 + 8x + 15$ schrijven als het product $(x + 3)(x + 5)$.
Om de ontbinding $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$ zelf te maken, gaat het erom de getallen 3 en 5 te vinden. Die krijg je door twee getallen te zoeken met product 15 en som 8.

Dat zoeken gaat handig met de **tabel van 15**. In die tabel zet je alle manieren om 15 als product van twee gehele getallen te schrijven. Het is handig daarbij achter elk tweetal factoren de som te schrijven. Je ziet dat je 3 en 5 moet hebben.

product 15		som
1	15	16
-1	-15	-16
3	5	8
-3	-5	-8

De ontbinding van $x^2 + 9x + 14$ krijg je als volgt.

$$x^2 + 9x + 14 = (x + \dots)(x + \dots)$$

som 9

product 14
dus maak de
tabel van 14

zoek twee getallen
met product 14 en
som 9

product 14		som
1	14	15
-1	-14	-15
2	7	9
-2	-7	-9

In de tabel van 14 zie je dat je de getallen 2 en 7 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 9x + 14 = (x + 2)(x + 7)$.

De ontbinding van $x^2 + 7x - 8$ krijg je als volgt.

$$x^2 + 7x - 8 = (x - \dots)(x + \dots)$$

som 7

product -8
dus maak de
tabel van -8

zoek twee getallen
met product -8 en
som 7

product -8		som
1	-8	-7
-1	8	7
2	-4	-2
-2	4	-2

In de tabel van -8 zie je dat je de getallen -1 en 8 moet hebben. Je krijgt $x^2 + 7x - 8 = (x - 1)(x + 8)$.

Deze methode van ontbinden heet de **product-som-methode**.

 Hiernaast staat de tabel van 18.

a Vul de tabel verder in.

b Ontbind in factoren.

$x^2 + 11x + 18 =$ _____

$x^2 - 9x + 18 =$ _____

$x^2 + 19x + 18 =$ _____

$x^2 + 9x + 18 =$ _____

product 18		som
1	18	19
-1	-18	-19
2
-2
...
...

 **a** Maak de tabel van 16.

b Ontbind in factoren.

$x^2 + 10x + 16 =$ _____


$x^2 + 17x + 16 =$ _____

$x^2 - 8x + 16 =$ _____

 Ontbind in factoren.

a $x^2 + 8x + 7 =$ _____

b $x^2 - 10x + 9 =$ _____

 Je kunt $x^2 - x - 20$ schrijven als $x^2 - 1x - 20$, dus $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$.

Ontbind in factoren.

a $x^2 + x - 6 =$ _____

b $x^2 + x - 30 =$ _____

 Ontbind in factoren.

a $x^2 - 8x + 15 =$ _____

b $25a^2 - 30a =$ _____

c $x^2 + 10x + 24 =$ _____

d $x^2 - x - 2 =$ _____

e $10pq + 5p =$ _____

f $x^2 - 13x + 12 =$ _____

$x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$,
maar je mag ook schrijven
 $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$.



7 [HAVO-B] Kwadratische vergelijkingen

7.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

Theorie A Product is nul

Een vermenigvuldiging waar een factor 0 in staat, heeft als uitkomst altijd 0.

Bij de vergelijking $A \cdot B = 0$ weet je dus dat $A = 0$ of $B = 0$.

Met deze regel kun je sommige vergelijkingen oplossen.

Bij de vergelijking $2x(3x + 9) = 0$ zie je de twee factoren, $2x$ en $3x + 9$.

Eén van die factoren moet 0 zijn. Dus je weet dat $2x = 0$ of $3x + 9 = 0$.

Je moet dus twee vergelijkingen oplossen.

$$2x = 0 \vee 3x + 9 = 0$$

$$x = 0 \vee 3x = -9$$

$$x = 0 \vee x = -3$$

\vee betekent of



Voorbeeld

Los op.

a $4x(2x - 18) = 0$

b $(x + 8)(x - 3) = 0$

Uitwerking

a $4x(2x - 18) = 0$

$$4x = 0 \vee 2x - 18 = 0$$

$$x = 0 \vee 2x = 18$$

$$x = 0 \vee x = 9$$

b $(x + 8)(x - 3) = 0$

$$x + 8 = 0 \vee x - 3 = 0$$

$$x = -8 \vee x = 3$$



Los op.

a $8x(4x - 8) = 0$

b $(3x + 12)(x - 6) = 0$

c $5x(x + 7) = 0$

d $(x - 4)(3x - 15) = 0$

Oplossen van kwadratische vergelijkingen

De vergelijking $x^2 - x - 42 = 0$ is een voorbeeld van een kwadratische vergelijking. Om die op te lossen, ga je eerst het linkerlid ontbinden in factoren. Daarna pas je de volgende regel toe.

$$A \cdot B = 0 \text{ geeft } A = 0 \vee B = 0$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 42 &= 0 && \text{ontbinden in factoren} \\ (x + 6)(x - 7) &= 0 && \text{pas toe } A \cdot B = 0 \\ x + 6 = 0 \vee x - 7 &= 0 && \text{dit geeft } A = 0 \text{ of } B = 0 \\ x = -6 \vee x &= 7 \end{aligned}$$

Een kwadratische vergelijking zoals $x^2 + 2x = 15$ kun je alleen oplossen als het rechterlid 0 is. Je herleidt de vergelijking dus eerst tot $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Werkschema: Kwadratische vergelijkingen oplossen

- 1 Maak het rechterlid 0.
- 2 Ontbind het linkerlid in factoren.
- 3 Pas toe $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.

product -42

1	42
1	42
2	-21
-2	21
3	-14
-3	14
6	-7
-6	7

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - 6x = 7$

b $5a^2 = -30a$

Uitwerking

$$\begin{aligned} \text{a } x^2 - 6x &= 7 \\ x^2 - 6x - 7 &= 0 \\ (x + 1)(x - 7) &= 0 \\ x + 1 = 0 \vee x - 7 &= 0 \\ x = -1 \vee x &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b } 5a^2 &= -30a \\ 5a^2 + 30a &= 0 \\ 5a(a + 6) &= 0 \\ 5a = 0 \vee a + 6 &= 0 \\ a = 0 \vee a &= -6 \end{aligned}$$



Los op.

a $x^2 + 5x - 24 = 0$

b $x^2 - 8x = 33$

c $x^2 = 6x$

d $4x^2 + 2x = 0$

e $b^2 + 7b + 12 = 0$

f $x^2 - 15 = -2x$



Los op.

a $14x^2 = 21x$

b $(x + 8)(x - 5) = 0$

c $x^2 + 11x + 10 = 0$

d $x^2 + 12x = -35$

e $x^2 = 14x - 40$

f $a^2 - 50 = 4 - 3a$

Thema 1 F Vergelijkingen van de vorm $x^2 = c$ oplossen

De vergelijking $x^2 = 47$ is ook een kwadratische vergelijking.

Deze vergelijking heeft twee oplossingen. Je kunt de oplossingen meteen opschrijven. Je krijgt $x = \sqrt{47} \vee x = -\sqrt{47}$.

De vergelijking $x^2 = -16$ heeft geen oplossing, want een kwadraat is niet negatief.

Bij vergelijkingen van de vorm $x^2 = c$ zijn er drie mogelijkheden:

- er zijn twee oplossingen, als $c > 0$ bijvoorbeeld $x^2 = 9$
- er is geen oplossing, als $c < 0$ bijvoorbeeld $x^2 = -4$
- er is één oplossing, als $c = 0$ bijvoorbeeld $x^2 = 0$

Soms moet je een vergelijking eerst herleiden om de vorm $x^2 = c$ te krijgen.

Voorbeeld

Los op.

a $x^2 - 81 = 0$

b $3x^2 - 18 = 0$

Uitwerking

a $x^2 - 81 = 0$

$x^2 = 81$

$x = 9 \vee x = -9$ *bedenk dat $\sqrt{81} = 9$*

b $3x^2 - 18 = 0$

$3x^2 = 18$

$x^2 = 6$

$x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$



Los op.

a $x^2 = 100$

b $x^2 = -20$

c $-x^2 = 144$

d $x^2 + 64 = 0$

e $5x^2 - 45 = 0$

f $3x^2 + 2 = 101$



Los op.

a $(x + 3)(x - 8) = 0$

b $p(3p + 9) = 0$

c $5c^2 + 25c = 0$

d $x^2 - 4x = 21$

e $x^2 - 3x = -2x$

f $3b^2 = -15b$

g $(x - 7)(3x + 6) = 0$

h $-3x^2 - 1 = 50$

i $6b^2 = 96$



Los op.

a $x^2 - 10 = 0$

b $q^2 + 15q = -50$

c $p(5p + 10) = 0$

d $x^2 + 5x = 2x$

e $x^2 + 12x = -27$

f $x^2 + 9x = -14 + 9x$

g $x^2 - x = 20$

h $5x^2 = 10$

i $9x^2 = 900$

7.2 De *abc*-formule

Tip: Oplossen met de *abc*-formule

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$.

Een kwadratische vergelijking kun je oplossen met de ***abc*-formule**.

Dat doe je als je de vergelijking niet kunt oplossen met ontbinden in factoren.

Werkschema: Kwadratische vergelijkingen oplossen met de *abc*-formule

1 Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$.

2 Vermeld welke getallen a , b en c zijn.

3 Bereken $D = b^2 - 4ac$.

4 De oplossingen zijn $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ en $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

$D = b^2 - 4ac$ heet de **discriminant** van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

Van de vergelijking $3x^2 + 7x - 2 = 0$ bereken je de discriminant als volgt.

$$a = 3, b = 7 \text{ en } c = -2$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 73$$

$a \neq 0$ betekent
 a is niet gelijk aan 0

De *abc*-formule

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \text{ met } D = b^2 - 4ac.$$

Voorbeeld

Los op $2x^2 + 5x = 3$.

Uitwerking

$$2x^2 + 5x = 3$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$a = 2, b = 5 \text{ en } c = -3$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 49$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = -3$$

maak het rechterlid 0

ontbinden lukt niet, dus gebruik de *abc*-formule

bereken eerst $D = b^2 - 4ac$



Los op.

a $3x^2 - 7x + 2 = 0$

b $5x^2 = 4 + x$

c $4x^2 + 9x = -2$

d $4x^2 + 5x + 1 = 0$

e $2x^2 + 3x = 5$

f $4x^2 - 8x + 3 = 0$

Thema 6 Oplossen met de *abc*-formule

Soms komt \sqrt{D} niet mooi uit. Laat dan het getal onder het wortelteken gewoon staan.

Los op $5x^2 = 6 - 10x$.

Uitwerking

$$5x^2 = 6 - 10x$$

$$5x^2 + 10x - 6 = 0$$

$$a = 5, b = 10 \text{ en } c = -6$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot -6 = 220$$

$$x = \frac{-10 + \sqrt{220}}{10} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{220}}{10}$$



Los op.

a $x^2 + 10x + 13 = 0$

b $x^2 = 5x + 8$

c $4x^2 = 5x + 2$

d $8x^2 = x + 10$

e $x^2 = -3x + 1$

Thema 6 Het aantal oplossingen van een vergelijking

De discriminant van een kwadratische vergelijking kan een negatief getal zijn. In de *abc*-formule geeft dat dan de wortel uit een negatief getal. Een wortel uit een negatief getal bestaat niet, daarom heeft de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ geen oplossing als $D < 0$. Een kwadratische vergelijking met

- $D < 0$ heeft geen oplossing
- $D = 0$ heeft één oplossing
- $D > 0$ heeft twee oplossingen.

Los op $x^2 + x + 2 = 0$.

Uitwerking

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$a = 1, b = 1 \text{ en } c = 2$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$$

$D < 0$, dus geen oplossing.



Los op.

a $4x^2 + 2x + 3 = 0$

b $7x + 2 = x^2$

c $15x^2 = 8x + 5$

d $-x^2 + 5x + 3 = 0$

e $14x - 5x^2 - 3 = 0$

f $-2x^2 = 3x + 5$

10

Los op.

a $20x^2 + 25x + 1 = 0$

b $3x + 1 = 2x^2$

c $2x^2 = x - 5$

d $-3x^2 + 7x + 2 = 0$

e $5x^2 - 12x - 10 = 0$

f $x^2 + 5x + 9 = 0$

g $x^2 - 4 = 2x$

h $6x^2 + x = 1$

8 [HAVO-B/MBO] Kwadratische functies

Thema 1 Kwadratische functies en functiewaarden

De functies $f(x) = x^2 - 5x + 8$ en $g(x) = -2x^2 + 3x$ zijn voorbeelden van kwadratische functies.

Een functie f van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie.

$a \neq 0$ betekent
 a is niet gelijk aan 0

Neem je bij $f(x) = ax^2 + bx + c$

- $a = 1$, $b = -5$ en $c = 8$, dan krijg je $f(x) = x^2 - 5x + 8$
- $a = -6$, $b = 8$ en $c = 0$, dan krijg je $f(x) = -6x^2 + 8x$.

Ook bij kwadratische functies kun je functiewaarden berekenen.

Zo krijg je bij $f(x) = -6x^2 + 8x$ voor $x = -5$ de functiewaarde

$$f(-5) = -6 \cdot (-5)^2 + 8 \cdot (-5) = -150 - 40 = -190.$$

Denk hierbij aan de haakjes om -5 .

En zo krijg je bij $f(x) = x^2 - 5x + 8$ voor $x = 4$ de functiewaarde $f(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 8 = 16 - 20 + 8 = 4$.

Bij de functies $f(x) = -6x^2 + 8x$ en $f(x) = x^2 - 5x + 8$ horen de formules $y = -6x^2 + 8x$ en $y = x^2 - 5x + 8$.

Ga je x^2 berekenen voor $x = -4$, dan zet je -4 tussen haakjes. Dus voor $x = -4$ is $x^2 = (-4)^2 = 16$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

a Bereken $f(4)$ en $f(-6)$.

b Onderzoek of het punt $(-5, 74)$ op de grafiek van f ligt.

Uitwerking

a $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 24$

$$f(-6) = 2 \cdot (-6)^2 - 3 \cdot (-6) + 4 = 94$$

b $f(-5) = 2 \cdot (-5)^2 - 3 \cdot (-5) + 4 = 69$

Het punt $(-5, 74)$ ligt dus niet op de grafiek van f .



Een functie van de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is een kwadratische functie. Welke functie krijg je voor

- a** $a = 2$, $b = 6$ en $c = -3$ **b** $a = -1$, $b = 3$ en $c = 0$ **c** $a = 4$, $b = 0$ en $c = 2$

Welke getallen zijn a , b en c bij

- d** $f(x) = 5x^2 - x + 1$ **e** $f(x) = -x^2 + 8x$ **f** $f(x) = 3x^2 - 11$



Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x$.

- a** Geef de formule van f .
b Bereken $f(4)$ en $f(-4)$.
c Waarom ligt het punt $A(-10, 180)$ op de grafiek van f ?
d Onderzoek of het punt $B(-5, -15)$ op de grafiek van f ligt.



Gegeven is de functie $h(x) = x^2 - x - 2$.

- a** Bereken $h(-3)$ en $h(5)$.
b Op de grafiek van h ligt het punt A met $x_A = 4$. Bereken y_A .
c Op de grafiek van h ligt het punt B met $x_B = -5$. Bereken de y_B .

Thema 10 De top van een parabool

De grafiek van een kwadratische functie is een parabool.

Van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ kun je de coördinaten van de top $(x_{\text{top}}, y_{\text{top}})$ berekenen.

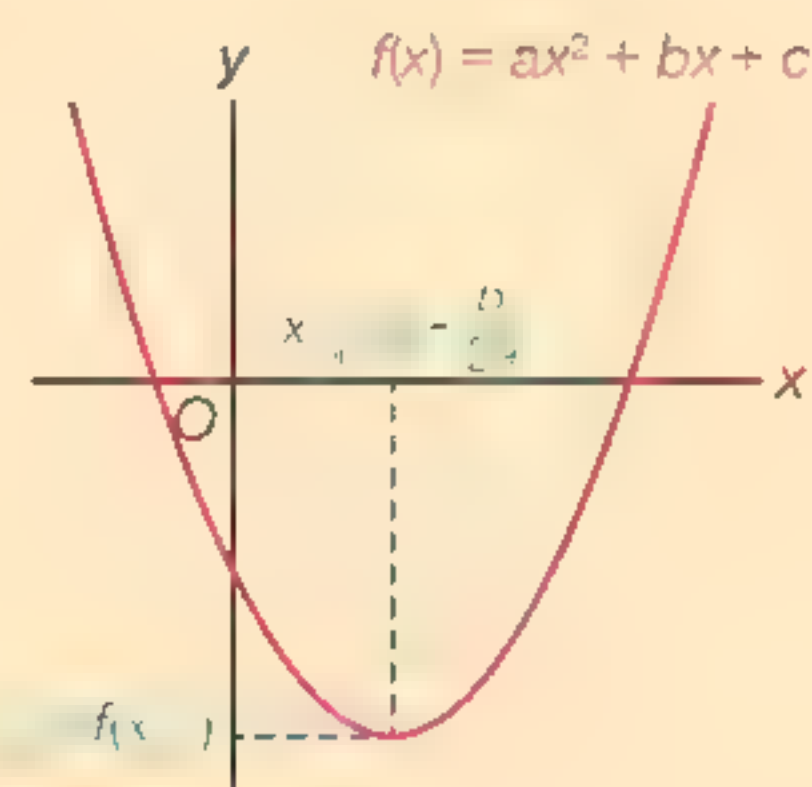
Er geldt namelijk $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$.

Wil je dus van de functie $f(x) = x^2 - 6x + 4$ de coördinaten van de top van de grafiek berekenen,

bedenk dan dat $a = 1$ en $b = -6$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$.

De y -coördinaat van de top krijg je door de x -coördinaat van de top in te vullen in het functievoorschrift.

Dit geeft $y_{\text{top}} = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$, dus de top is het punt $(3, -5)$.



Voorbeeld

Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

Uitwerking

$$a = -2 \text{ en } b = -4, \text{ dus } x_{\text{top}} = -\frac{-4}{2 \cdot -2} = -1.$$

$$y_{\text{top}} = f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot -1 + 1 = 3$$

Dus de top is $(-1, 3)$.



Bereken de coördinaten van de top van de grafiek van

a $f(x) = 2x^2 - 8x - 2$

c $h(x) = x^2 - 8x$

b $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - 4$

d $k(x) = -3x^2 + 4$

Theorie C Parabolen tekenen

De grafiek van de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool.

Aan het getal a kun je zien wat voor parabool het is.

Is a een positief getal, dan krijg je een dalparabool.

Zo is de grafiek van de functie

$f(x) = x^2 - 2x + 4$ een dalparabool.

Is a een negatief getal, dan krijg je een bergparabool.

Zo is de grafiek van de functie $h(x) = -2x^2 + 6x$ een bergparabool.

Om een parabool te tekenen, bereken je eerst de x -coördinaat van

de top met $x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$. Daarna maak je een tabel met zeven punten.

De x -coördinaat van de top zet je in het midden.

positief ☺ dalparabool
negatief ☹ bergparabool

Voorbeeld

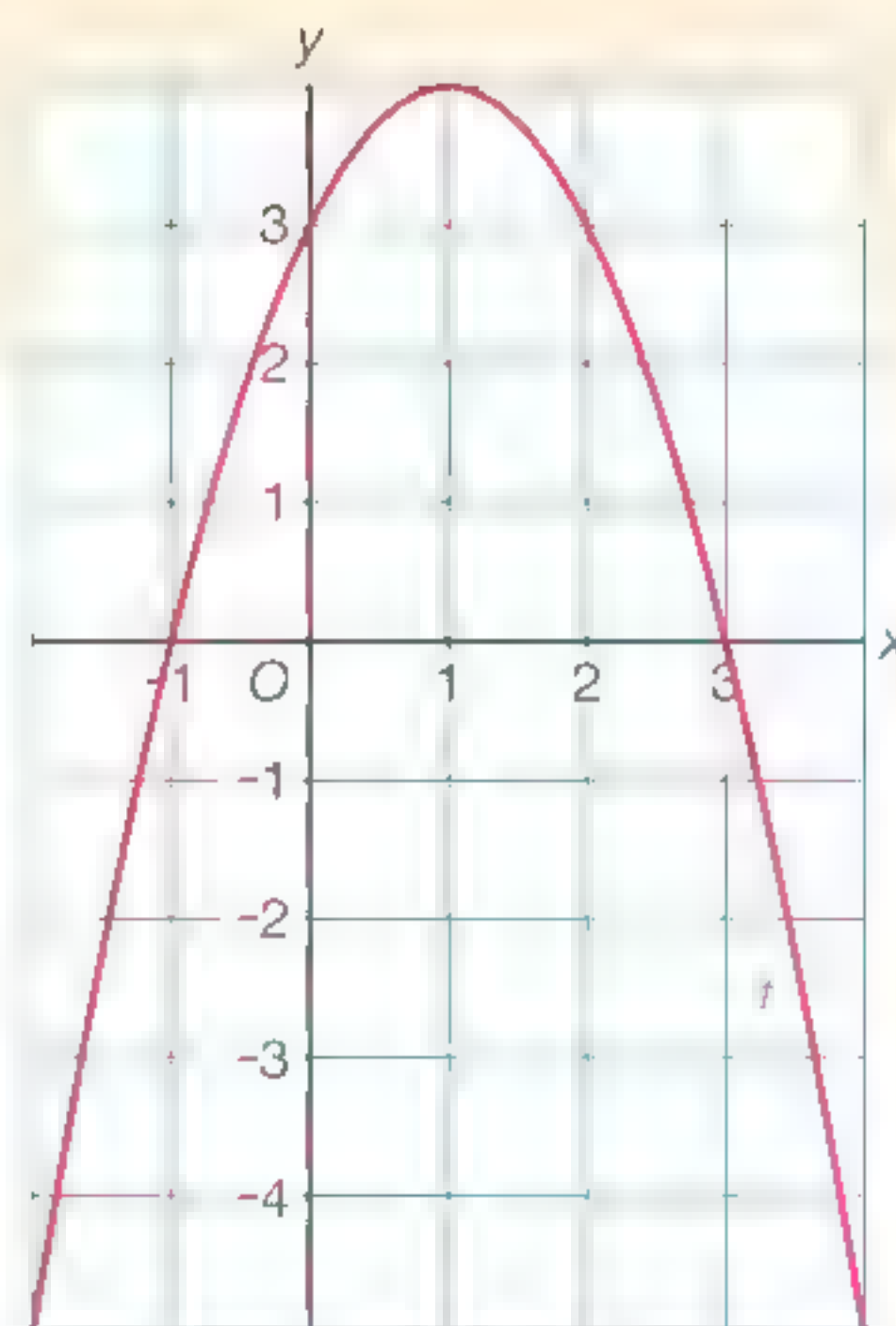
Teken de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Uitwerking

$a = -1$ en $b = 2$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{2}{2 \cdot -1} = 1$

				x_{top}			
x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

Zie de grafiek hiernaast.



Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 4$.

a Bereken de x -coördinaat van de top.

b Teken de grafiek van f .



De functie h is gegeven door $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

a Teken de grafiek van h .

b Onderzoek of het punt $A(-10, 264)$ op de grafiek van h ligt.

9 [HAVO-B] Kwadratische vormen

9.1 Snijpunten met de x -as en de y -as

Theorie Snijpunten met de x -as en de y -as

Bij de kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ bereken je de coördinaten van de snijpunten van de grafiek met de assen als volgt.

Snijpunten met de x -as: De y -coördinaat is 0. De x -coördinaat volgt uit $f(x) = 0$.
Dus los op $f(x) = 0$.

Snijpunt met de y -as: De x -coördinaat is 0. De y -coördinaat is $f(0)$.
Dus bereken $f(0)$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C .

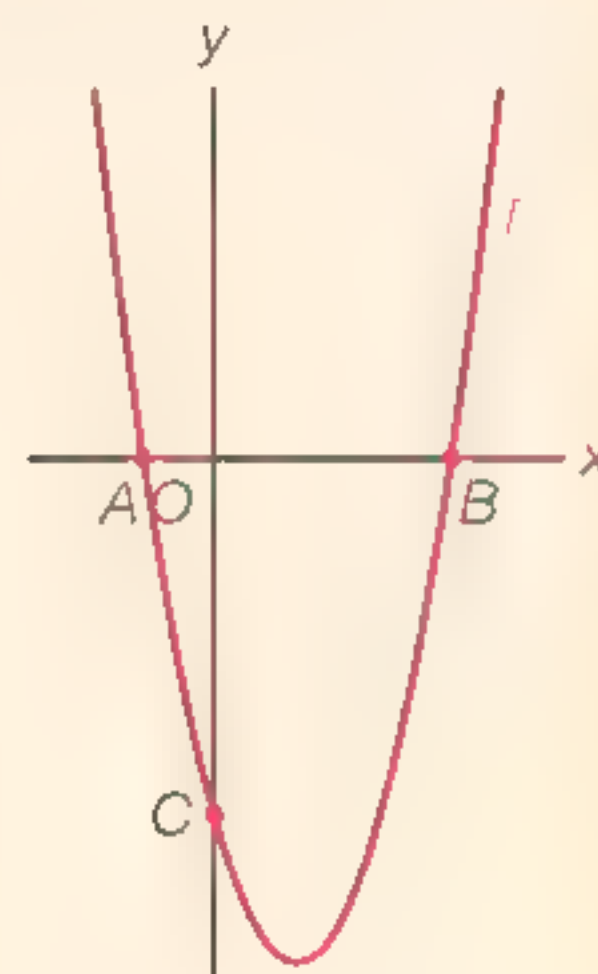
Bereken de coördinaten van A , B en C .

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \text{ geeft } x^2 - 5x - 6 &= 0 \\ (x+1)(x-6) &= 0 \\ x+1 = 0 \vee x-6 &= 0 \\ x = -1 \vee x &= 6 \end{aligned}$$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(6, 0)$.

$f(0) = -6$, dus $C(0, -6)$.



Gegeven is de functie $f(x) = x^2 + 5x$.

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x -as.



De grafiek van de functie $g(x) = x^2 - x - 12$ snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C .

Bereken de coördinaten van A , B en C .

9.2 De parabool $y = a(x - d)(x - e)$

Tip 1 De functie $f(x) = a(x - d)(x - e)$

Het functievoorschrift $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is te schrijven in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$. Je werkt dan de haakjes weg in $-2(x + 1)(x - 6)$.

Je weet dat $(x + 1)(x - 6) = x^2 - 6x + x - 6 = x^2 - 5x - 6$, dus $f(x) = -2(x + 1)(x - 6) = -2(x^2 - 5x - 6) = -2x^2 + 10x + 12$.

Dus $a = -2$, $b = 10$ en $c = 12$.

De functie $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is dus een kwadratische functie en de grafiek van f is een parabool.

En zo is

$$f(x) = 3(x - 2)(x - 4) = 3(x^2 - 4x - 2x + 8) = 3(x^2 - 6x + 8) = 3x^2 - 18x + 24.$$

Dus bij het herleiden van $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ tot de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ vind je $a = 3$, $b = -18$ en $c = 24$.

Functies zoals $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ en $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ zijn kwadratische functies die gegeven zijn in de vorm $f(x) = a(x - d)(x - e)$.

In $f(x) = -2(x + 1)(x - 6)$ is $a = -2$, $d = -1$ en $e = 6$.

In $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$ is $a = 3$, $d = 2$ en $e = 4$.

 Gegeven is de functie $f(x) = 3(x + 4)(x - 2)$.

a Bereken $f(-4)$, $f(4)$, $f(0)$ en $f(2)$.

b $f(x)$ heeft de vorm $f(x) = a(x - d)(x - e)$.

Geef a , d en e .

c Schrijf $f(x)$ in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$ en geef a , b en c .

 Gegeven is de functie $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 4)$.

a Bereken $g(-2)$, $g(0)$ en $g(-4)$.

b $g(x)$ heeft de vorm $g(x) = a(x - d)(x - e)$.

Geef a , d en e .

c Schrijf $g(x)$ in de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Thema 10 Bijzondere punten van de grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$

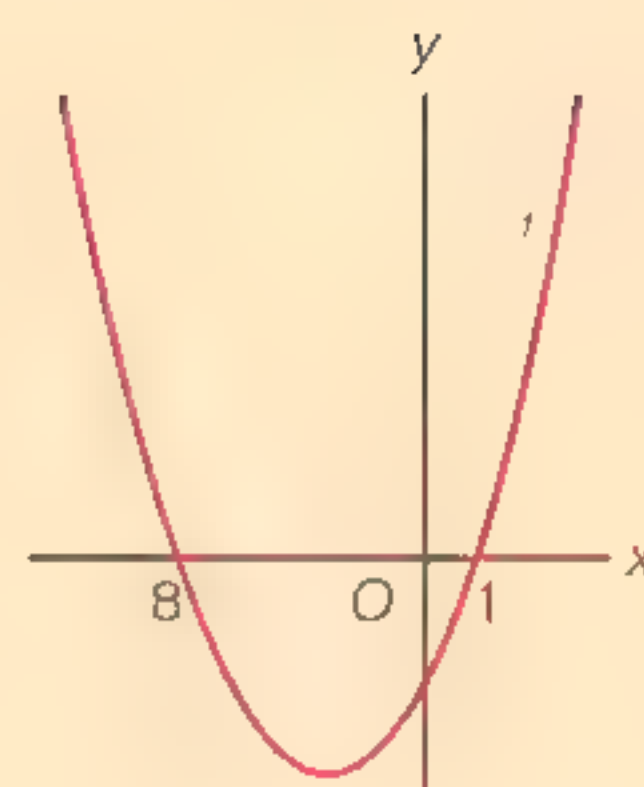
De coördinaten van de snijpunten van de grafiek van $f(x) = 2(x + 8)(x - 1)$ met de x -as zijn direct te geven.

Dat zijn $(-8, 0)$ en $(1, 0)$, want

$$f(-8) = 2(-8 + 8)(-8 - 1) = 2 \cdot 0 \cdot -9 = 0 \text{ en}$$

$$f(1) = 2(1 + 8)(1 - 1) = 2 \cdot 9 \cdot 0 = 0.$$

De grafiek van $f(x) = a(x - d)(x - e)$ snijdt de x -as in de punten $(d, 0)$ en $(e, 0)$.



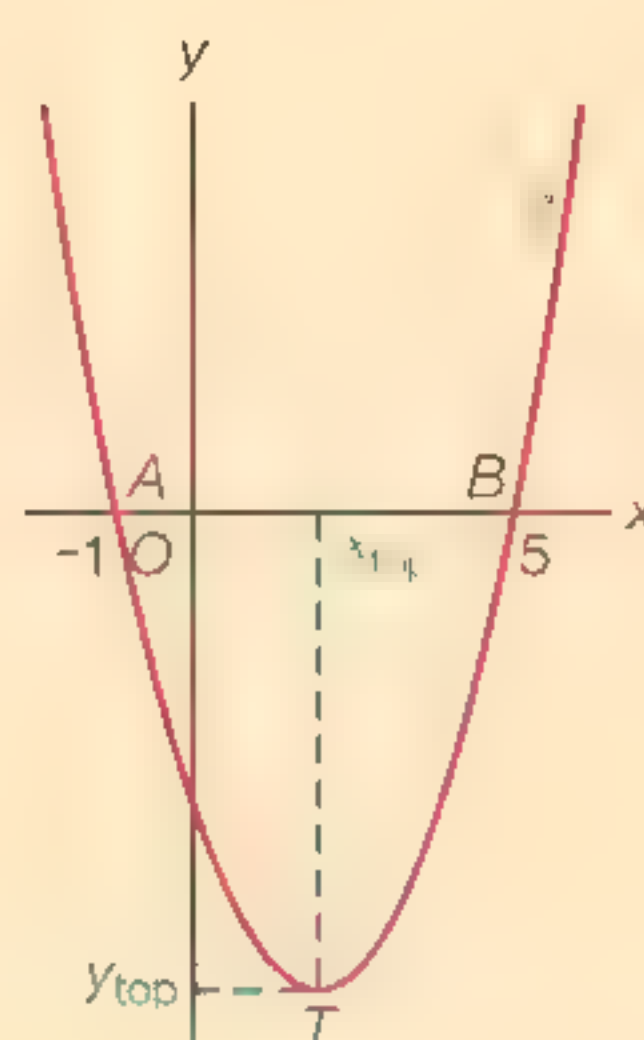
De coördinaten van de top T van de grafiek van $g(x) = (x + 1)(x - 5)$ volgen uit de snijpunten van de grafiek met de x -as.

De snijpunten met de x -as zijn de punten $A(-1, 0)$ en $B(5, 0)$. Dan is x_{top} het getal midden tussen -1 en 5 .

Je krijgt $x_{\text{top}} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$.

Daaruit volgt $y_{\text{top}} = g(2) = (2 + 1)(2 - 5) = 3 \cdot -3 = -9$.

Dus de top is het punt $T(2, -9)$.

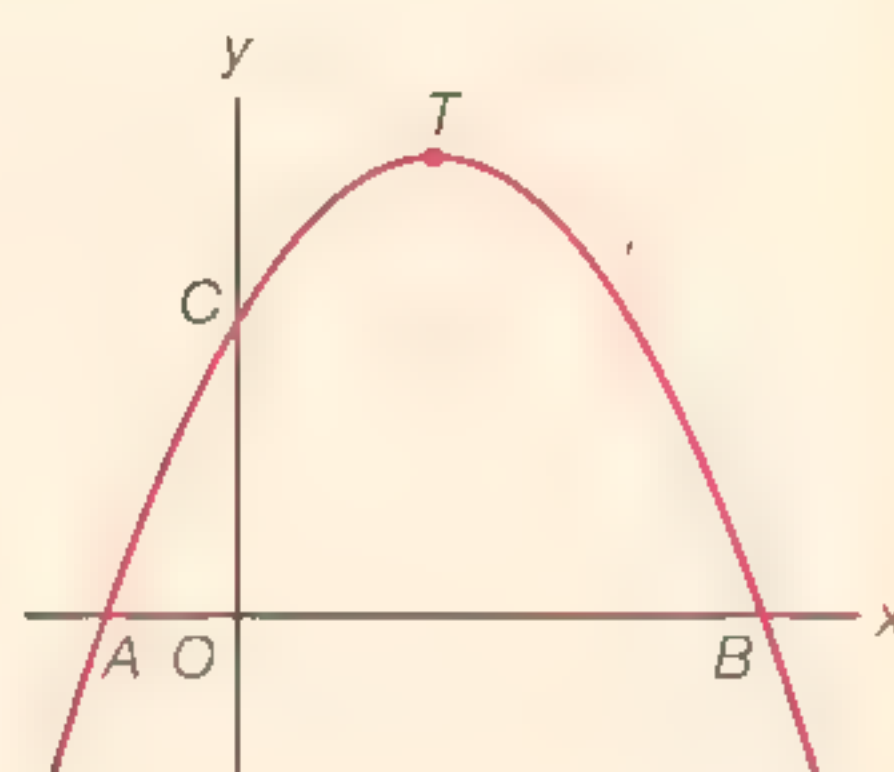


Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 8)$.

De grafiek van f snijdt de x -as in de punten A en B en de y -as in het punt C .

- Bereken de coördinaten van A , B en C .
- Bereken de coördinaten van de top T .



Uitwerking

- a** De snijpunten met de x -as zijn $A(-2, 0)$ en $B(8, 0)$.

$$f(0) = -\frac{1}{4}(0 + 2)(0 - 8) = -\frac{1}{4} \cdot 2 \cdot -8 = 4, \text{ dus } C(0, 4).$$

b $x_{\text{top}} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$

$$y_{\text{top}} = f(3) = -\frac{1}{4}(3 + 2)(3 - 8) = -\frac{1}{4} \cdot 5 \cdot -5 = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

Dus $T(3, 6\frac{1}{4})$.



Schrijf van de grafieken van de volgende functies uit het hoofd de coördinaten van de snijpunten met de x -as op.

a $f(x) = 5(x - 7)(x - 12)$

d $k(x) = x(x - 125)$

b $g(x) = -2(x + 8)(x + 19)$

e $m(x) = \frac{1}{2}(x - 20)(x + 160)$

c $h(x) = 5(x - 11)(x + 36)$

f $n(x) = -5x(x - 116)$



Bereken van de grafieken van de volgende functies de coördinaten van de snijpunten met de x -as en de y -as en bereken de coördinaten van de top.

a $f(x) = \frac{1}{2}(x - 6)(x - 10)$

b $g(x) = -5(x + 5)(x - 3)$

c $h(x) = 6x(x + 10)$

d $k(x) = -(x + 16)(x + 24)$



Gegeven is de functie $h(x) = 4x(x - 6)$.

a Bereken $h(0)$, $h(2)$ en $h(6)$.

b $h(x)$ is gegeven in de vorm $h(x) = a(x - d)(x - e)$.
Geef a , d en e .

c Schrijf het functievoorschrift van h in de vorm
 $h(x) = ax^2 + bx + c$.

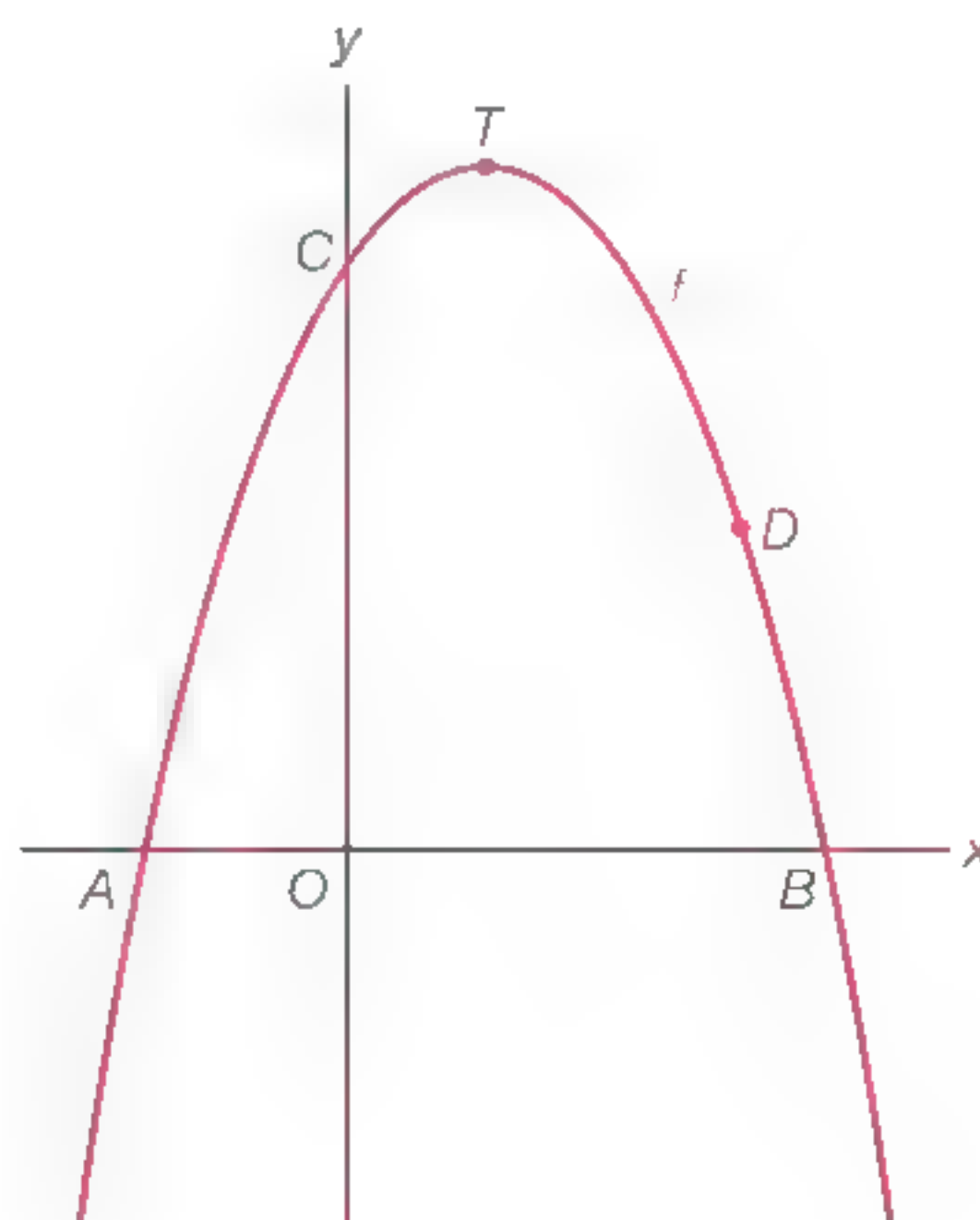


Hiernaast zie je een schets van de grafiek van de functie $f(x) = -2(x + 2)(x - 5)$.

a Bereken de coördinaten van de punten A , B , C en T .

b Van het punt D is $x_D = 4$.
Bereken y_D .

c Schrijf het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.



9.3 Parabolen verschuiven

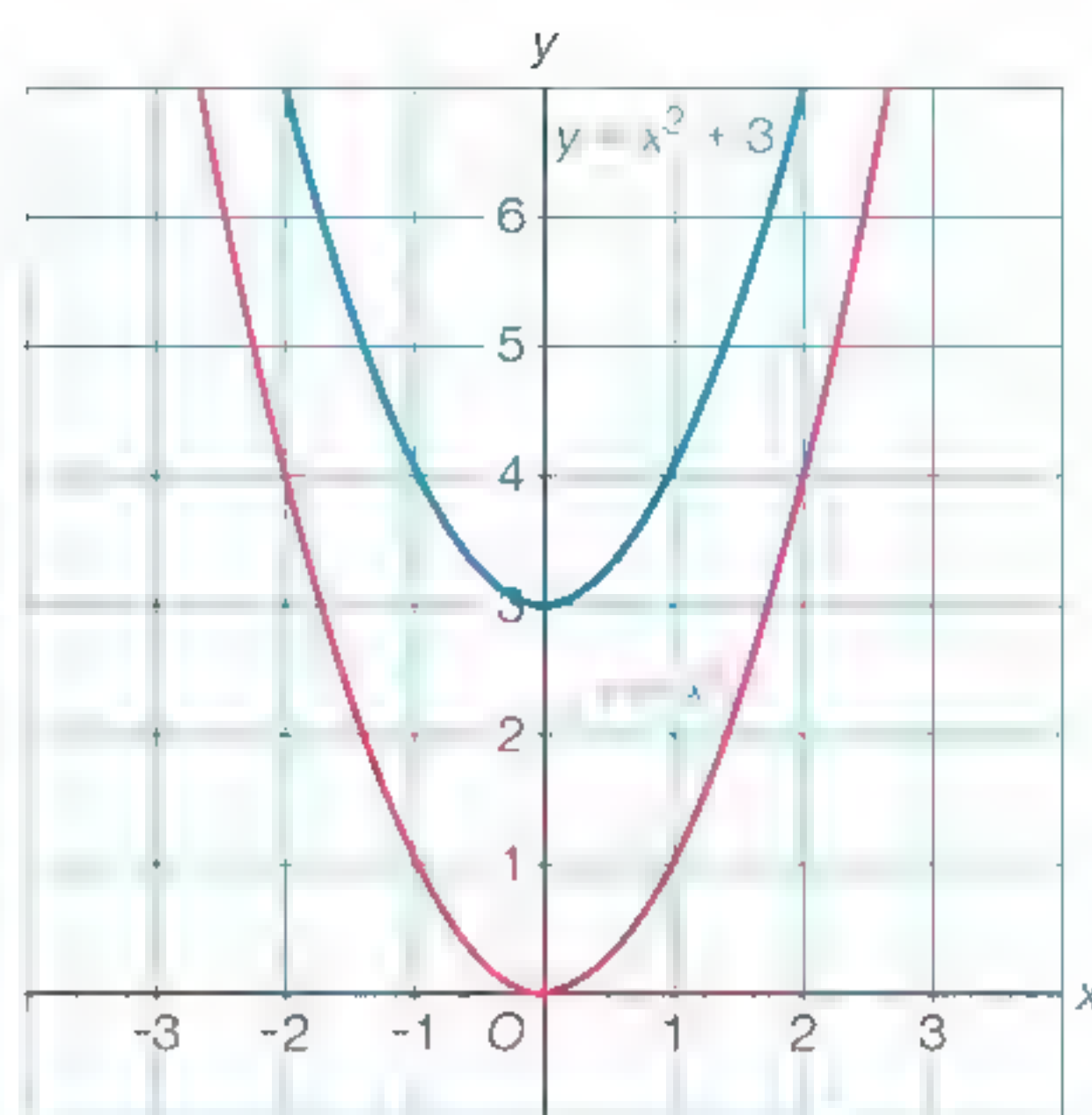


Hiernaast zie je de grafieken van

$$y = x^2 \text{ en } y = x^2 + 3.$$

Je kunt de rode grafiek zo verschuiven, dat deze precies op de blauwe valt.

Hoeveel moet je omhoog verschuiven?



THEMA 1 Verticaal verschuiven

Door de grafiek van $y = 2x^2$

- 1 omhoog te verschuiven, krijg je de grafiek van $y = 2x^2 + 1$
- 3 omlaag te verschuiven, krijg je de grafiek van $y = 2x^2 - 3$.

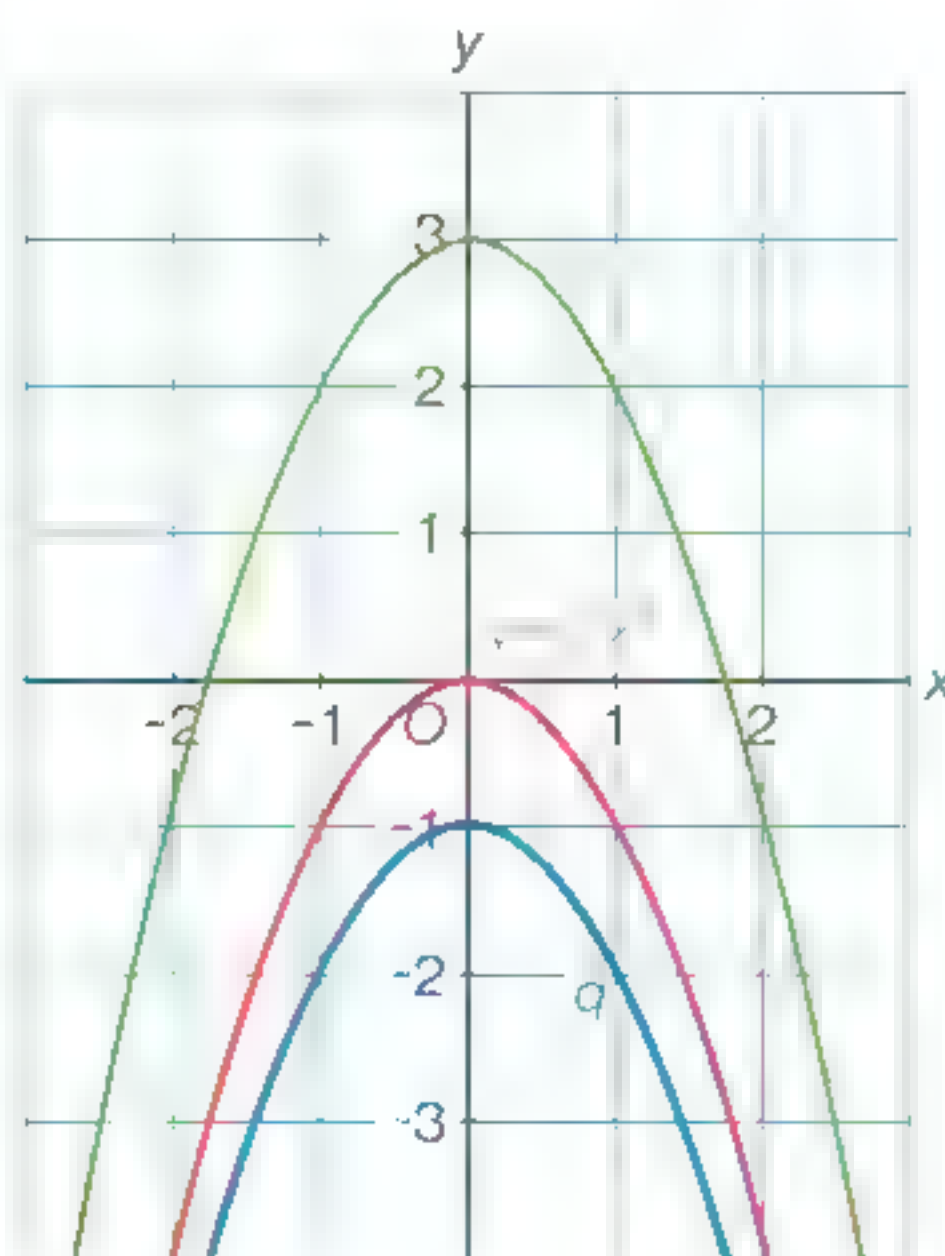
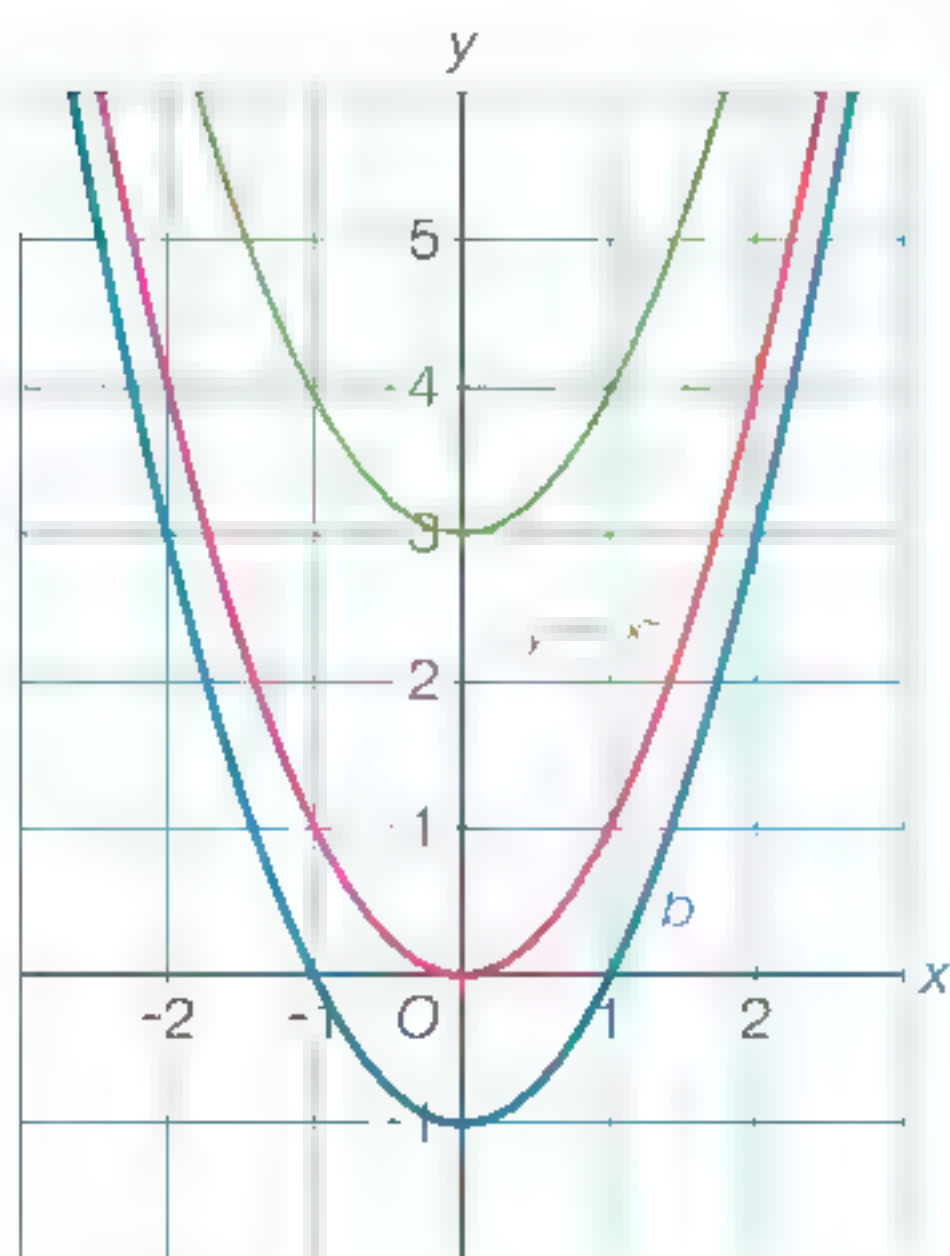


a In de figuur linksonder zie je drie parabolen. De parabolen van a en b krijg je door de parabool $y = x^2$ te verschuiven.

Schrijf de formules op van de parabolen a en b .

b In de figuur rechtsonder zie je drie parabolen. De parabolen van p en q krijg je door de parabool $y = -x^2$ te verschuiven.

Schrijf de formules op van de parabolen p en q .





De grafiek van de functie $f(x) = -3x^2$ wordt 5 omhoog verschoven. Je krijg de grafiek van de functie g .
Schrijf het functievoorschrift van g op.

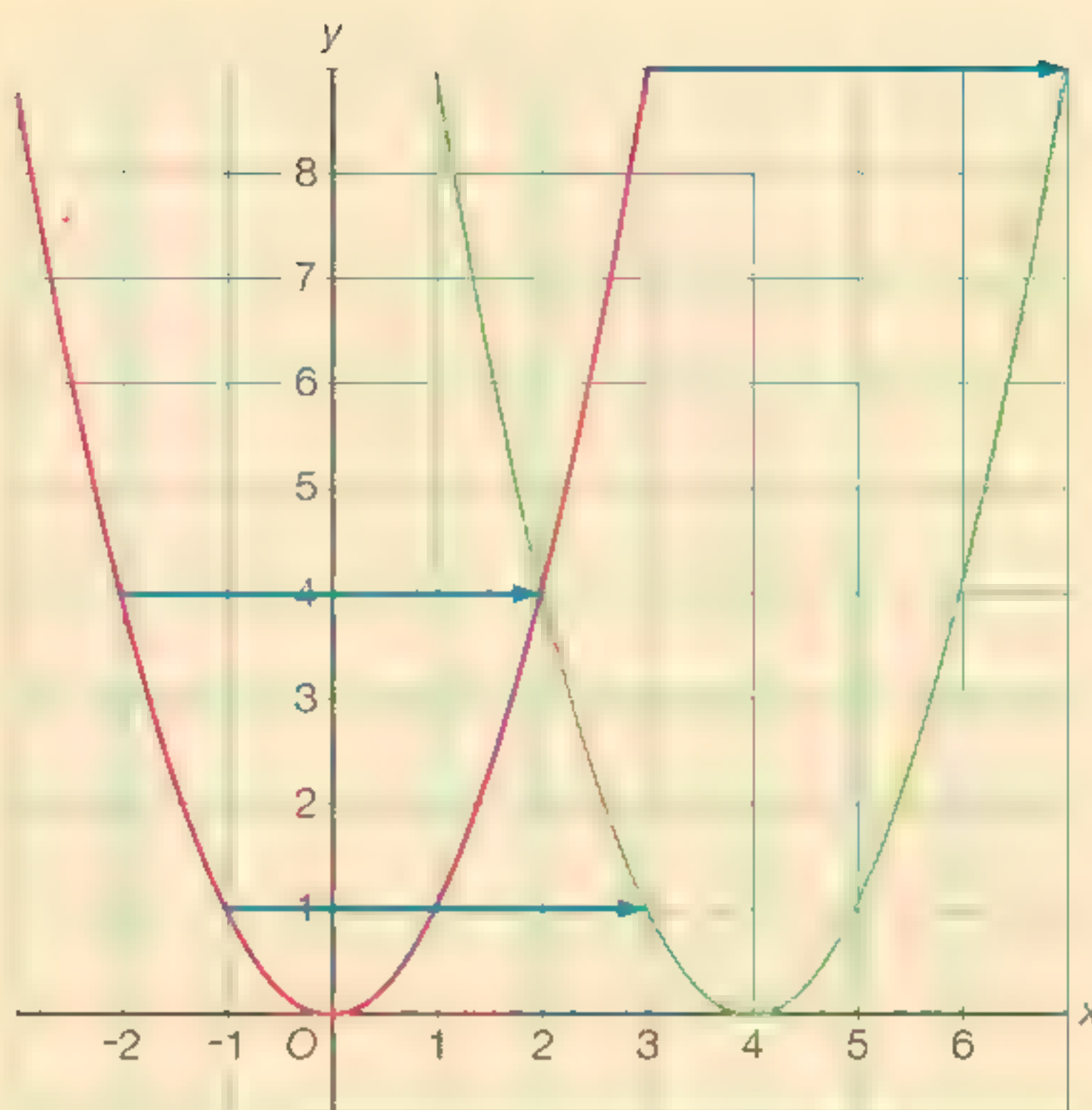
Horizontaal verschuiven

Er is een verband tussen de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = (x - 4)^2$.

$f(0) = g(4) = 0$, $f(1) = g(5) = 1$,
 $f(2) = g(6) = 4$, enzovoort.

Als je vanuit een punt van de grafiek van f dus 4 naar rechts gaat, dan krijg je een punt van de grafiek van g .

Door de grafiek van f dus 4 naar rechts te verschuiven, ontstaat de grafiek van g .



En zo geldt voor de functie $f(x) = x^2$

- verschuif je de grafiek 2 naar rechts dan krijg je de grafiek van $h(x) = (x - 2)^2$
- verschuif je de grafiek 3 naar links dan krijg je de grafiek van $k(x) = (x + 3)^2$.

Verschuiven van de grafiek van $y = 2x^2$

verticaal $y = 2x^2 \xrightarrow{4 \text{ omhoog}} y = 2x^2 + 4$

$y = 2x^2 \xrightarrow{4 \text{ omlaag}} y = 2x^2 - 4$

horizontaal $y = 2x^2 \xrightarrow{9 \text{ naar rechts}} y = 2(x - 9)^2$

$y = 2x^2 \xrightarrow{6 \text{ naar links}} y = 2(x + 6)^2$

9 naar rechts:

vervang x door $(x - 9)$

6 naar links:

vervang x door $(x + 6)$



Voorbeeld




De grafiek van de functie $f(x) = 0,3x^2 - 5$ wordt eerst 4 naar links verschoven en vervolgens 7 omlaag. Zo krijg je de grafiek van de functie g . Stel het functievoorschrift van g op.

Uitwerking

$$y = 0,3x^2 - 5 \xrightarrow{4 \text{ naar links}} y = 0,3(x + 4)^2 - 5 \quad \text{vervang } x \text{ door } (x + 4)$$

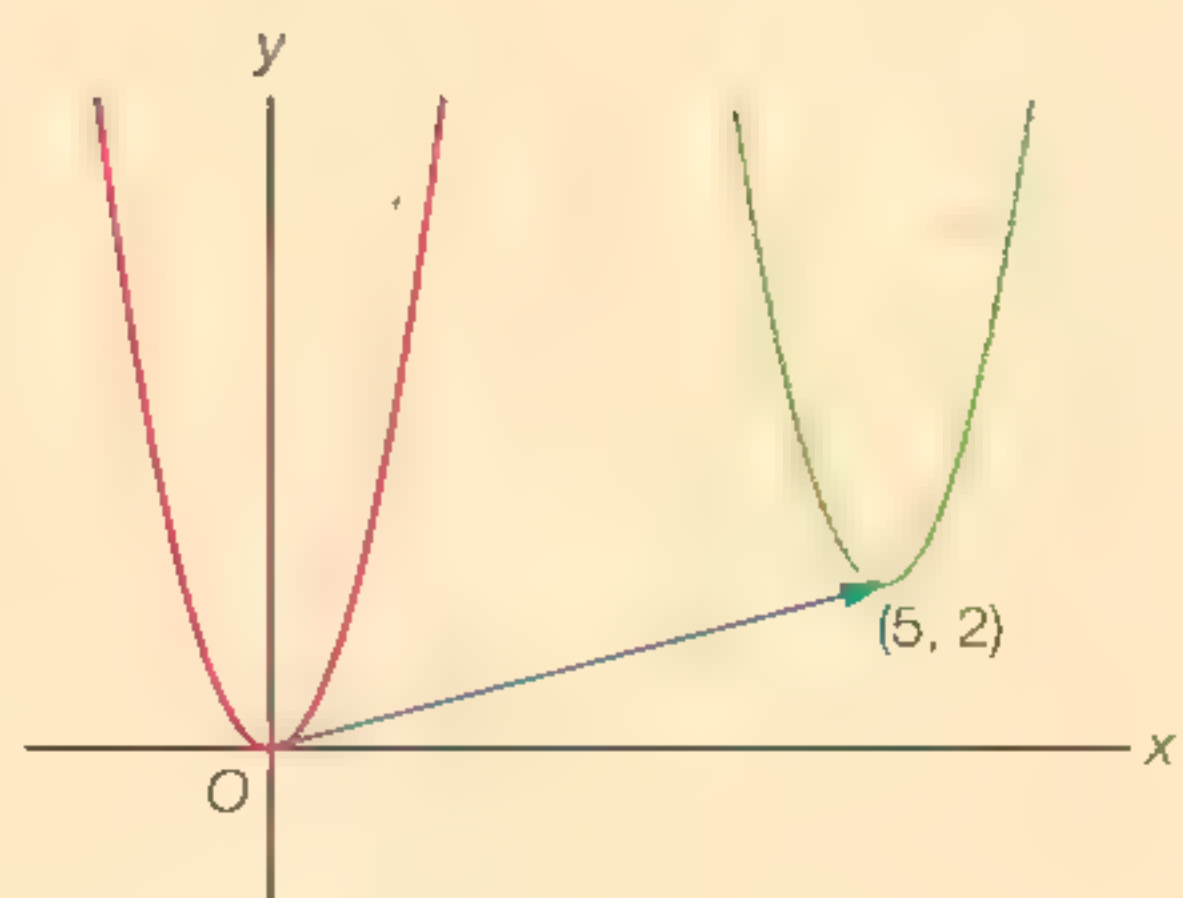
$$y = 0,3(x + 4)^2 - 5 \xrightarrow{7 \text{ omlaag}} y = 0,3(x + 4)^2 - 12 \quad \text{trek er 7 van af}$$

$$\text{Dus } g(x) = 0,3(x + 4)^2 - 12.$$

-  De grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ wordt 5 naar rechts verschoven. Zo krijg je de grafiek van de functie g . Stel het functievoorschrift van g op.
-  Stel de formule op van de parabool die ontstaat na een verschuiving van de parabool $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6$ van
- a 4 omhoog
 - b 2 omlaag
 - c 1 naar links en 8 omhoog
 - d 2 naar rechts en 3 omlaag
-  a Geef de verschuiving van de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ waardoor de grafiek van de functie $g(x) = (x - 2)^2 + 5$ ontstaat.
- b Geef de verschuiving van de grafiek van de functie $h(x) = -2x^2$ waardoor de grafiek van de functie $k(x) = -2(x + 3)^2 - 8$ ontstaat.

Tip De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$

De top van de grafiek van de functie $f(x) = 4x^2$ is $O(0, 0)$. Ook van de grafiek van de functie $g(x) = 4(x - 5)^2 + 2$ kun je direct de coördinaten van de top opschrijven. De grafiek van g ontstaat uit die van f door deze 5 naar rechts en 2 omhoog te verschuiven. De top van de grafiek van g is dus het punt $(5, 2)$.



De top van de parabool $y = a(x - p)^2 + q$ is het punt (p, q) .

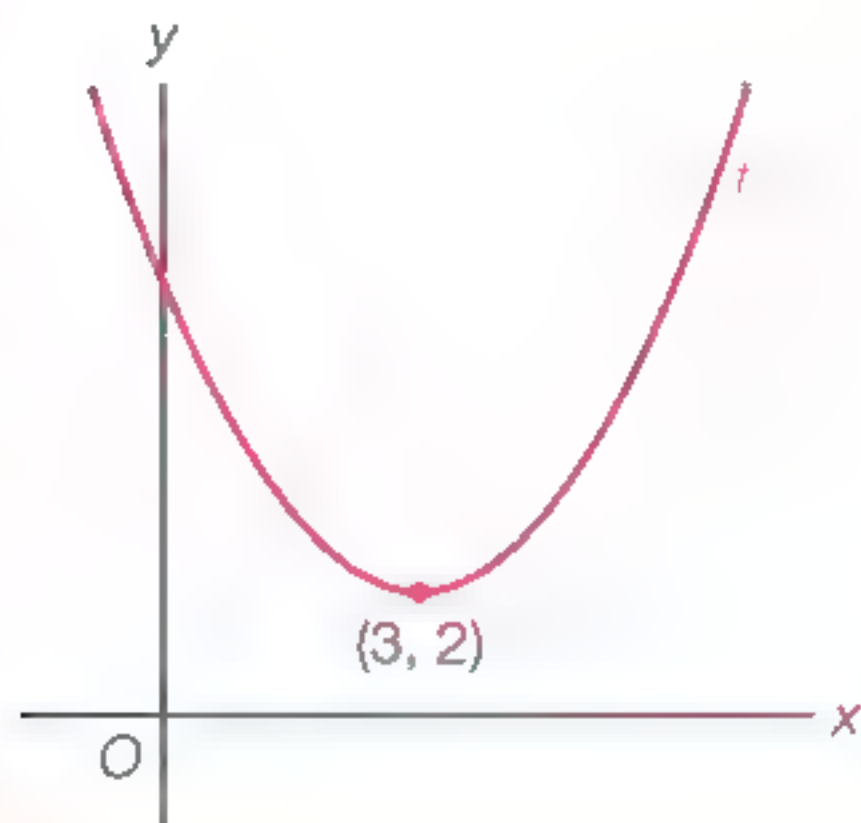
Voorbeeld

Schets de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$.

Uitwerking

$a = \frac{1}{2}$, dus dalparabool.

De top is het punt $(3, 2)$.



Zet in je schets de coördinaten van de top en de naam van de functie.



 Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

a $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

b $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$

c $h(x) = 4(x - 6)^2 + 4$

d $k(x) = -8(x + 6)^2 - 4$

 Schets van elk van de volgende functies de grafiek.

a $f(x) = -2x^2 - 4$

b $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$

c $h(x) = -3(x - 1)^2 + 3$

d $k(x) = (x + 6)^2$

 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^2 - 7$.

a Schets de grafiek van f .

b De grafiek van f wordt 3 naar rechts en 5 omhoog geschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g .

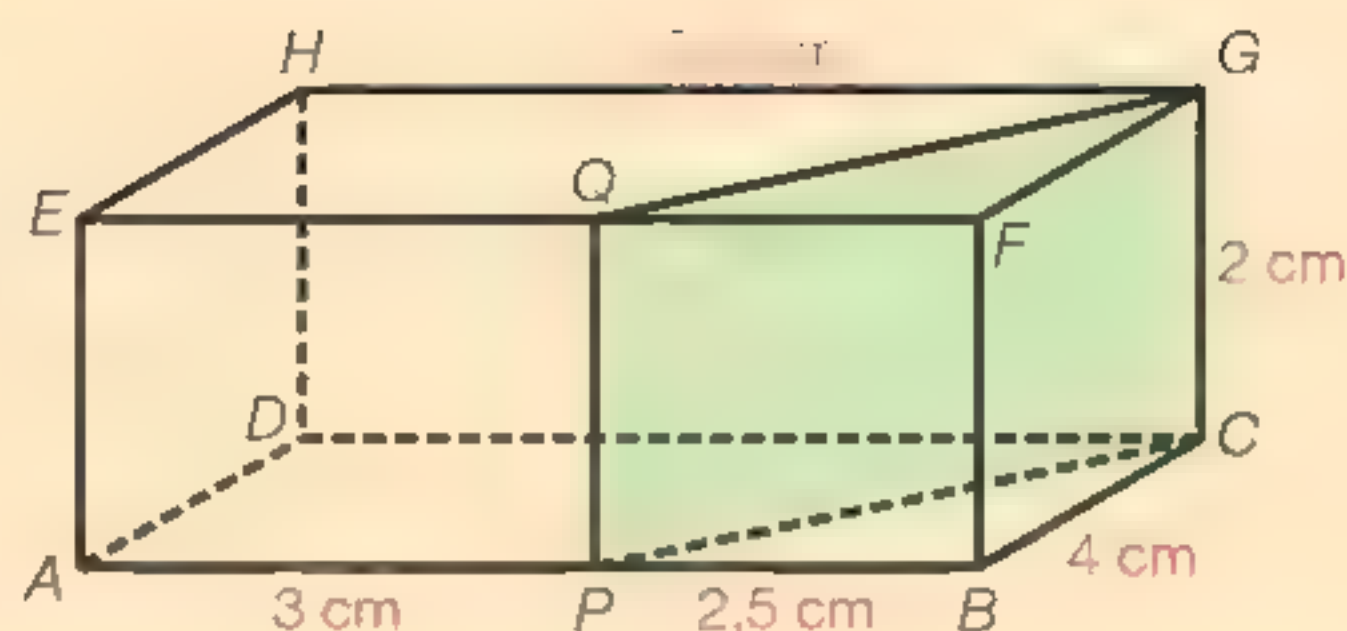
Schets in de figuur van vraag a de grafiek van g en geef het bijbehorende functievoorschrift.

Ruimtemeetkunde

10.1 Pythagoras en doorsnede

INNOVATIE Doorsnede op ware grootte

In de figuur hiernaast is vlak $PCGQ$ een **doorsnede** van de balk. Je kunt dit vlak op ware grootte tekenen.



Voorbeeld

Teken doorsnede $PCGQ$ op ware grootte.

Aanpak

- 1 Je weet dat $CG = 2$ cm.
- 2 De lengte van QG kun je berekenen. Dat gaat zo:
Maak een schets van het bovenvlak $EFGH$. Zet er maten en letters bij.
Teken QG in de schets. Bereken de lengte van QG met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.
- 3 Teken de doorsnede op ware grootte. Gebruik de lengte van QG en van CG . Zet de maten en de letters erbij.

Uitwerking

Zie de schets hiernaast.

$$rhz^2 = 6,25$$

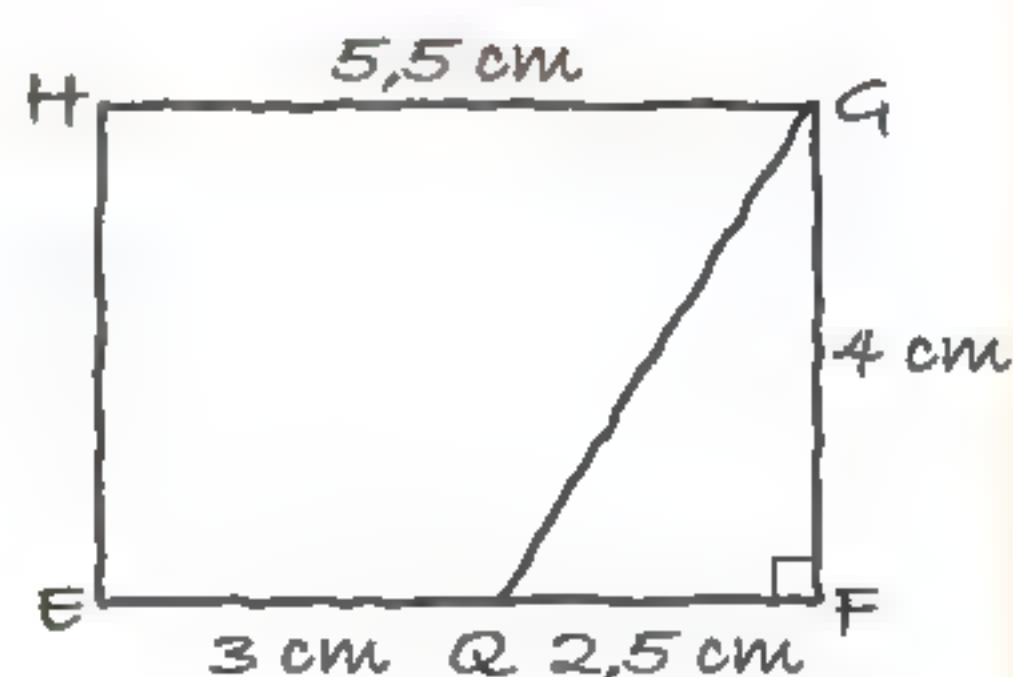
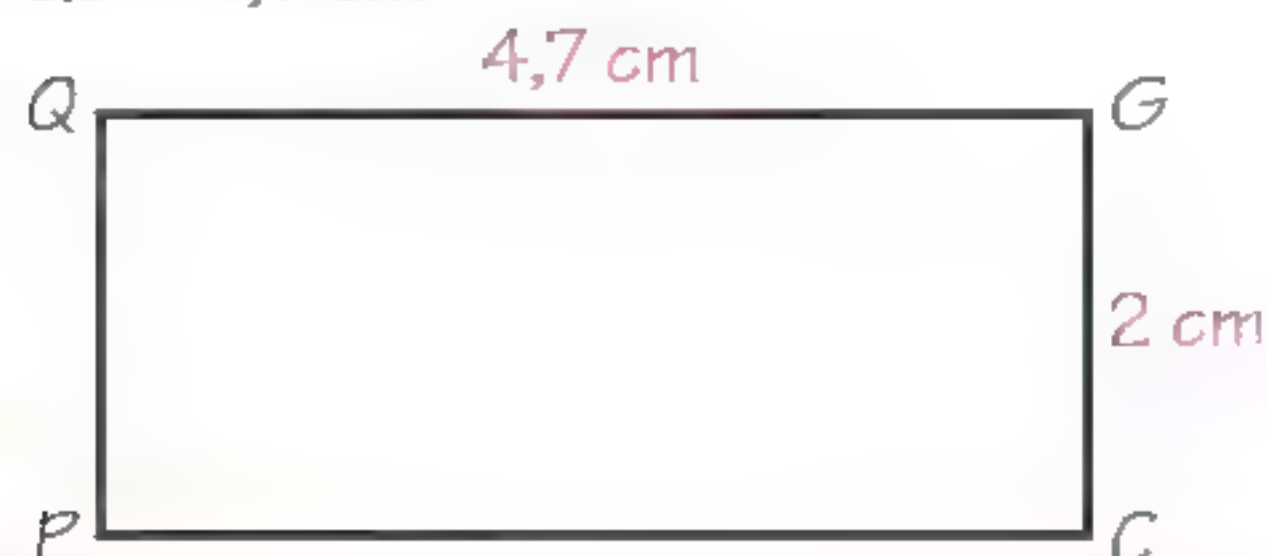
$$rhz^2 = 16$$

$$\frac{rhz^2}{rhz^2} = \frac{6,25}{16} +$$

$$sz^2 = 22,25$$

$$sz = \sqrt{22,25} = 4,716...$$

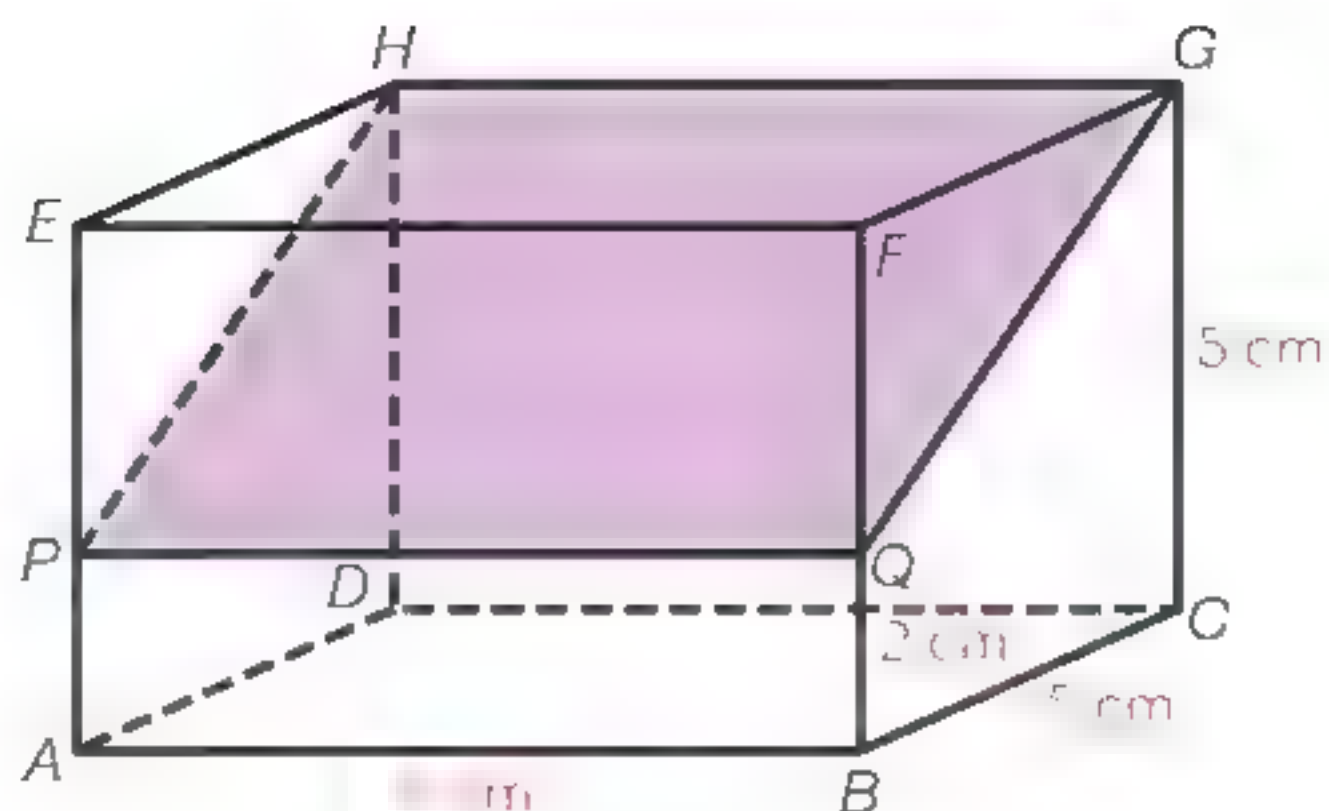
$$QG = 4,7 \text{ cm}$$





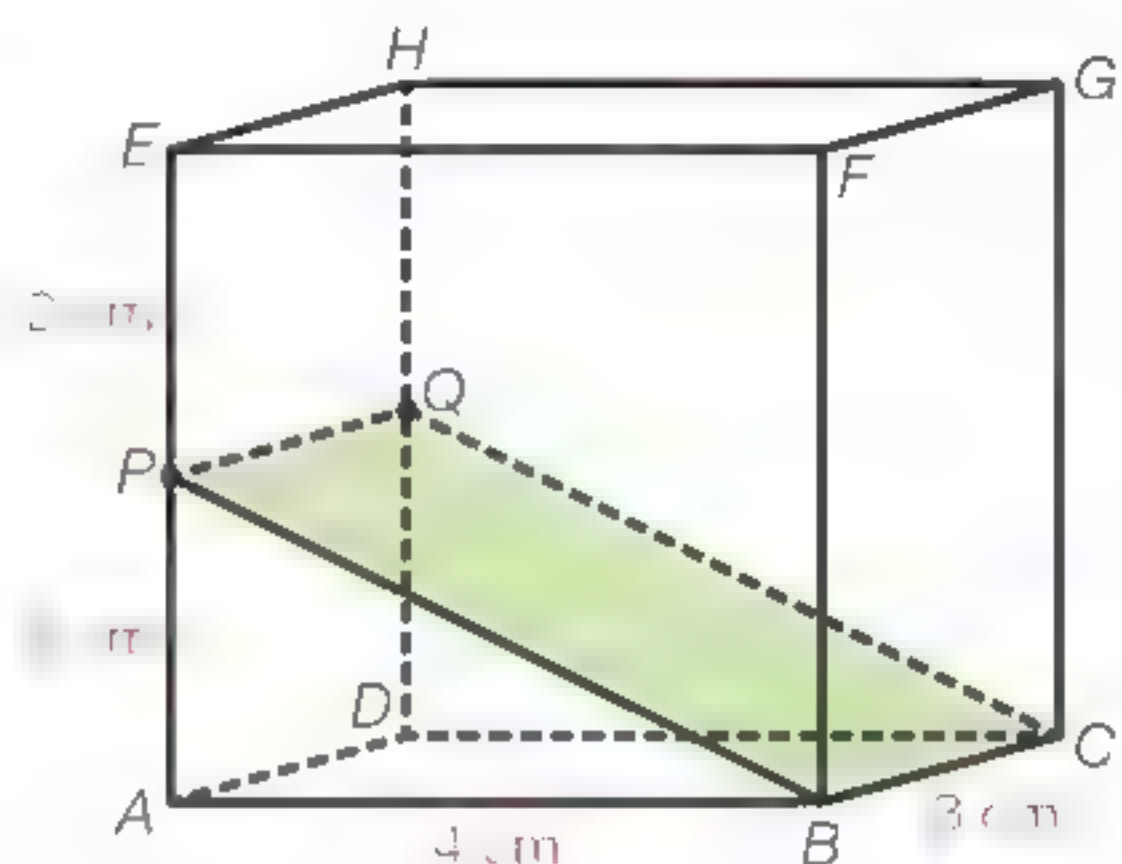
In de balk hiernaast is de doorsnede $PQGH$ getekend.

- Maak een schets van het rechterzijvlak met daarin QG . Zet er letters en maten bij.
- Bereken QG met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.
- Hoe lang is PQ ?
- Teken de doorsnede $PQGH$ op ware grootte.

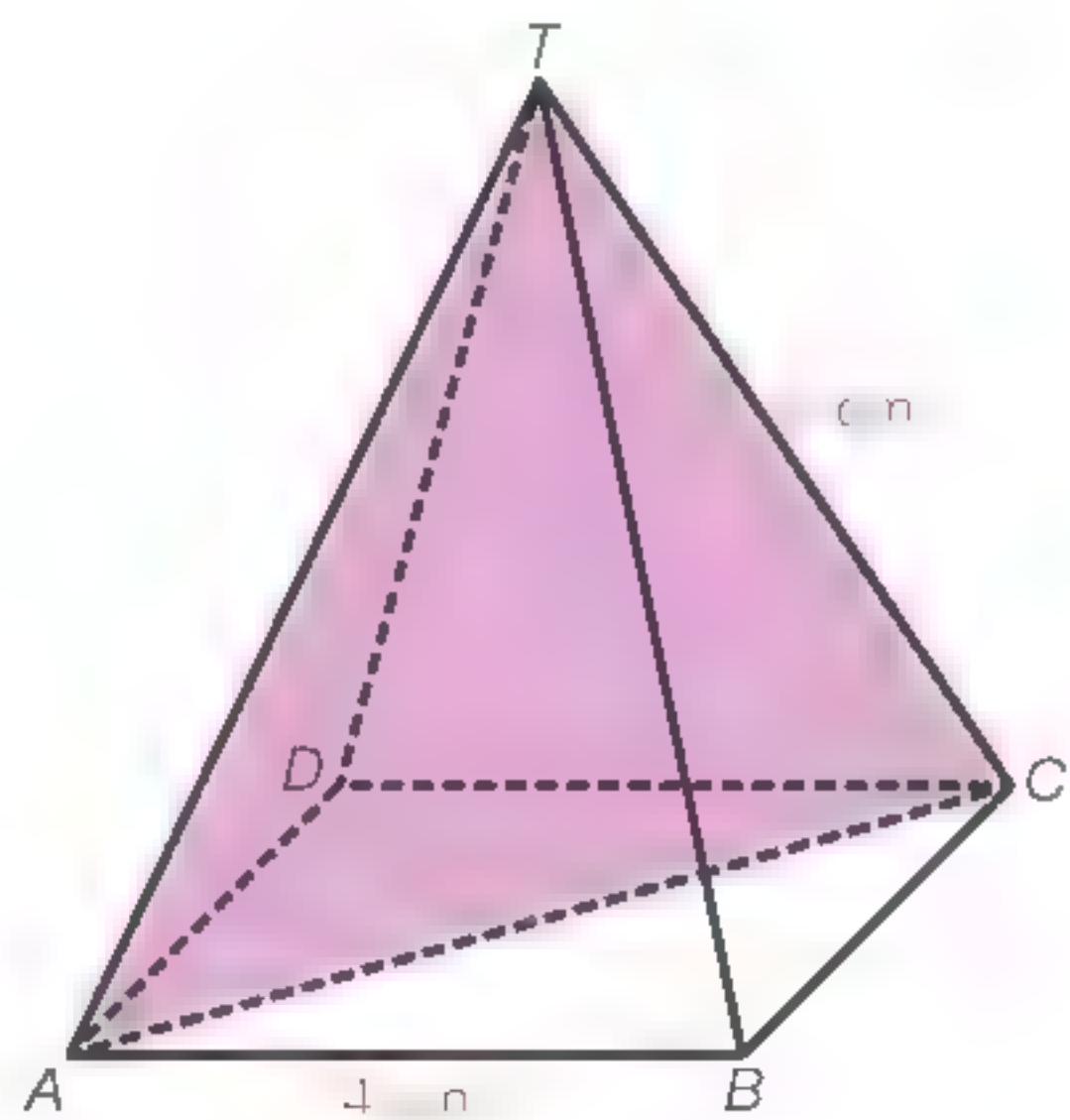


In de balk hiernaast is doorsnede $PBCQ$ getekend.

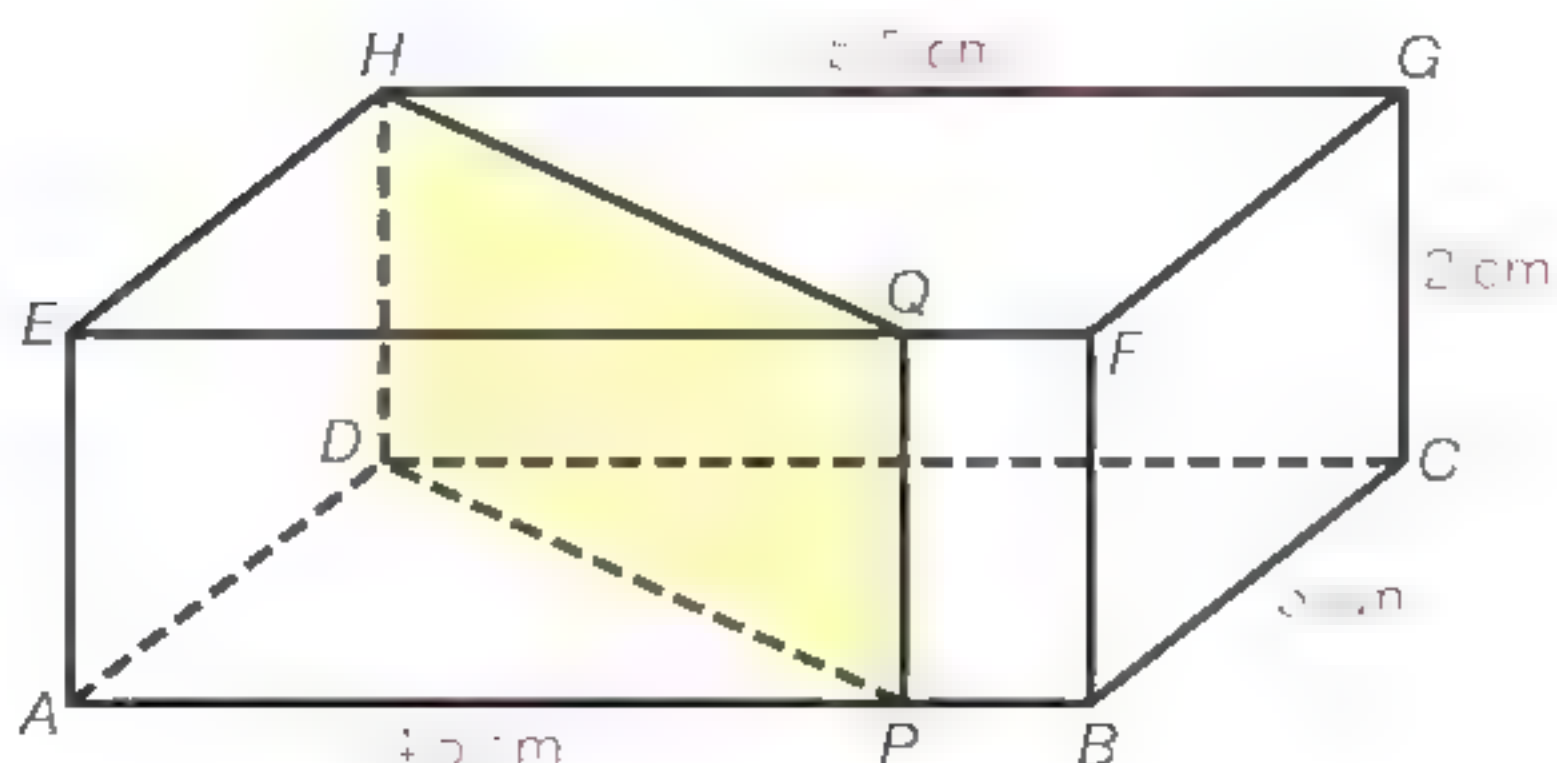
- Bereken PB met de stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.
- Teken $PBCQ$ op ware grootte.



Het grondvlak van de piramide hiernaast is een vierkant met zijden van 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 5 cm. Teken doorsnede ACT op ware grootte.



In de balk hiernaast is een doorsnede getekend. Teken doorsnede $DPQH$ op ware grootte.

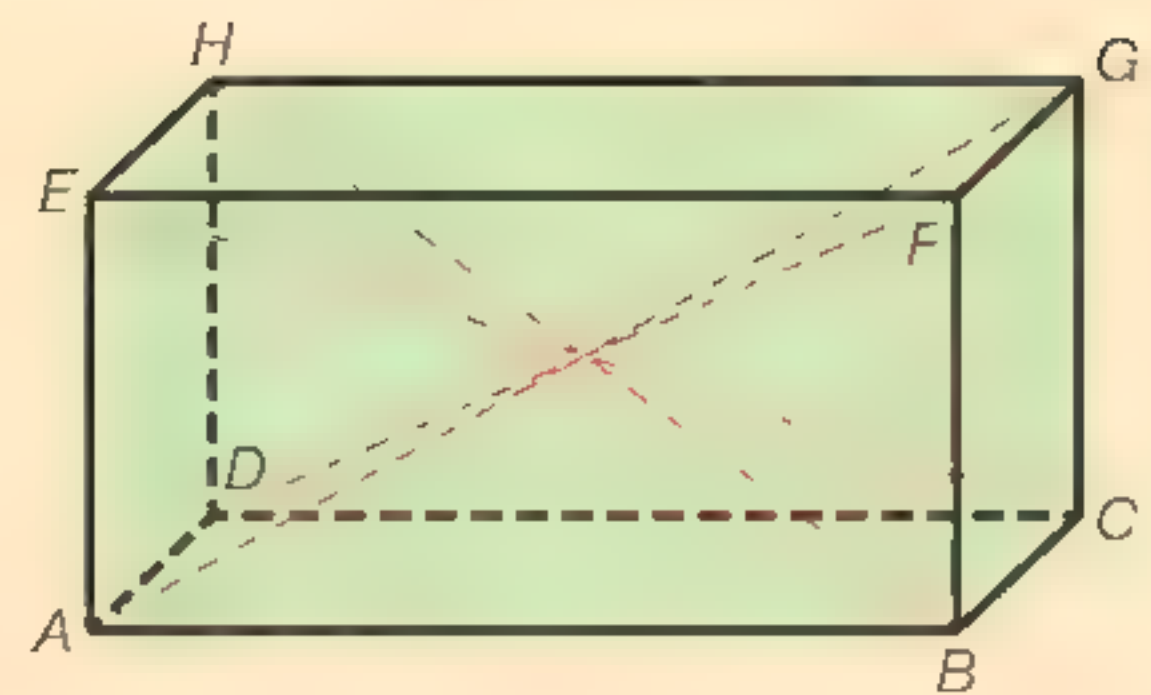


10.2 Berekeningen in de ruimte

Pythagoras en goniometrie in de ruimte

Een balk en een kubus hebben vier lichaamsdiagonalen. In de balk hiernaast zijn alle vier de lichaamsdiagonalen getekend: AG , BH , CE en DF .

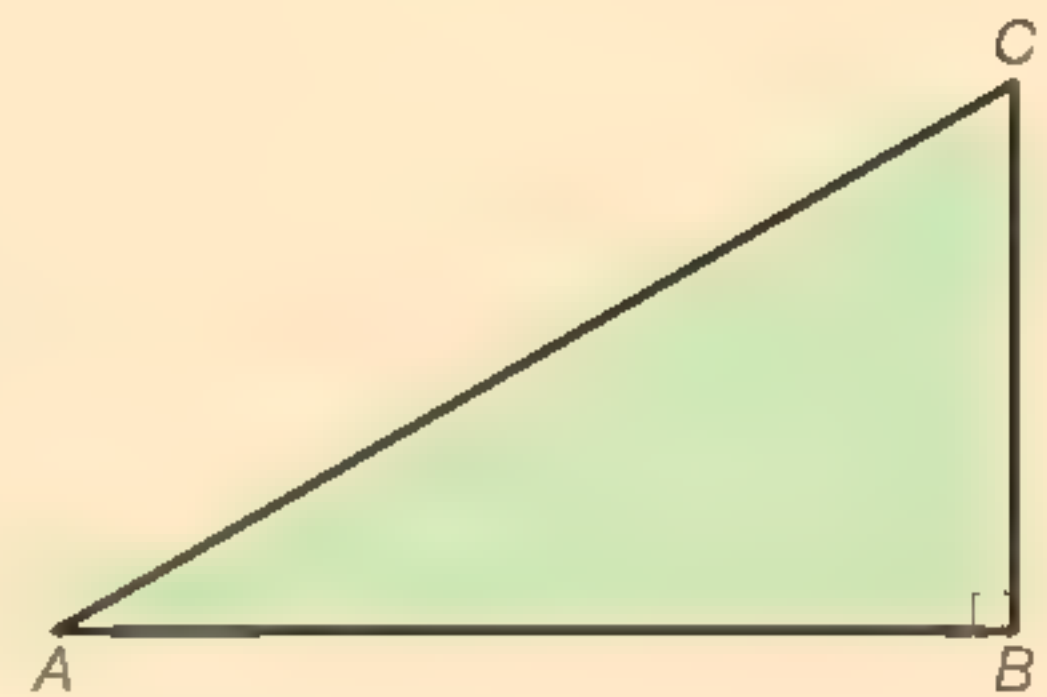
De vier lichaamsdiagonalen zijn even lang. De lengte van een lichaamsdiagonaal kun je snel berekenen met de **verlengde stelling van Pythagoras**.



In de balk met lichaamsdiagonalen zie je allerlei hoeken. Het is mogelijk om met goniometrie die hoeken te berekenen. Om een hoek te berekenen met goniometrie zoek je altijd een rechthoekige driehoek. Bij een rechthoekige driehoek horen de verhoudingen sinus, cosinus en tangens. Je kunt ze onthouden met het ezelsbruggetje **SOSCASTOA**.

Voor de rechthoekige driehoek ABC hiernaast horen bij $\angle A$ drie goniometrische verhoudingen:

$$\begin{aligned}\sin \angle A &= \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{BC}{AC} \\ \cos \angle A &= \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{AB}{AC} \\ \tan \angle A &= \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{BC}{AB}\end{aligned}$$



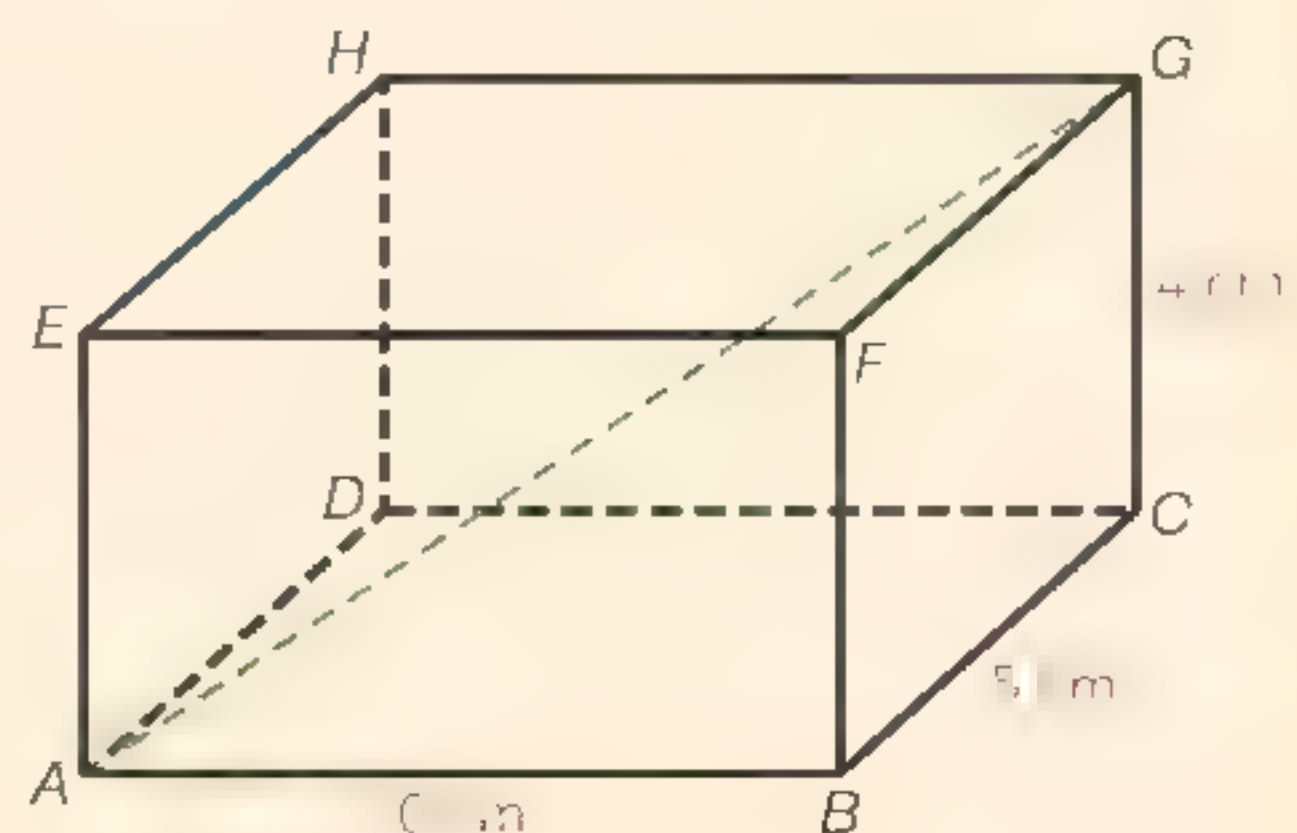
Voorbeeld

Bekijk de balk hiernaast.

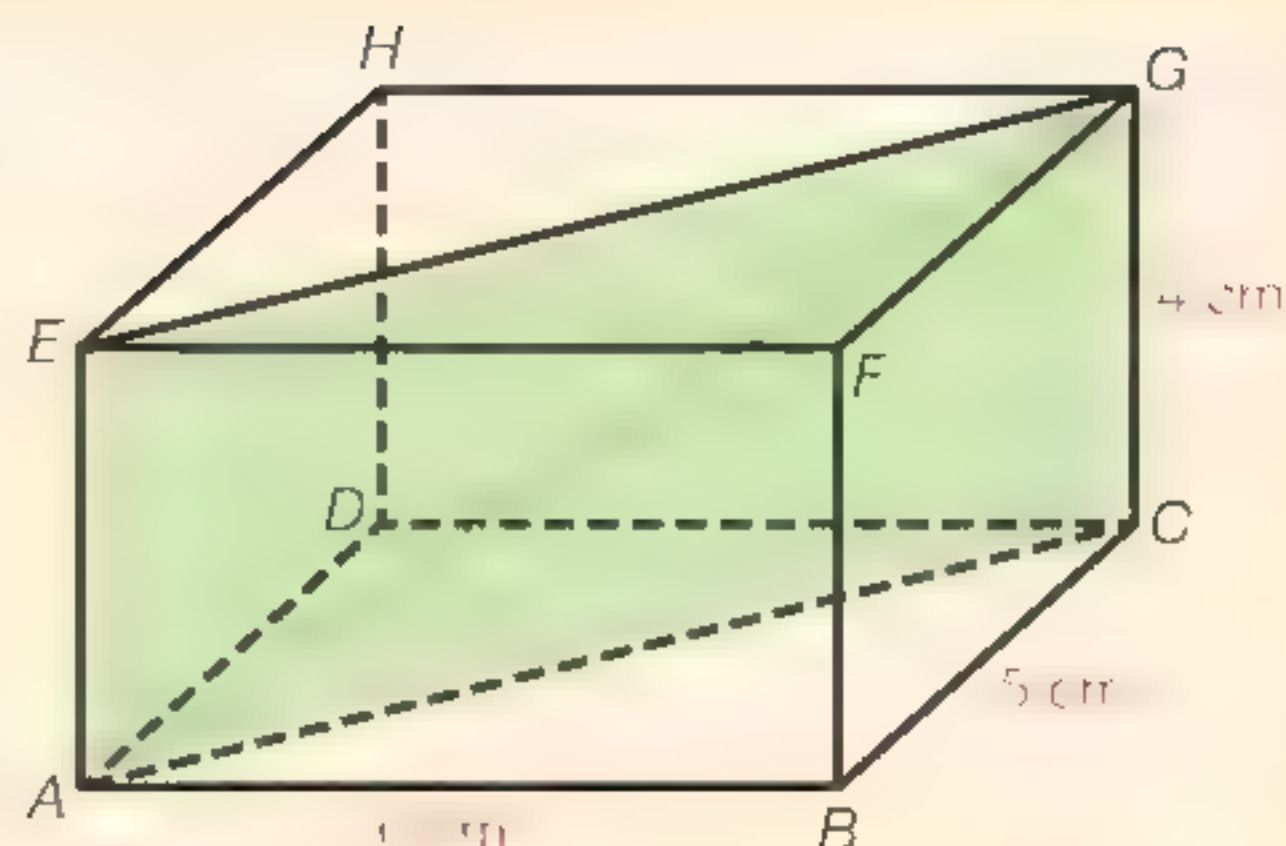
- Bereken AG . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle CAG$.

Aanpak

- Ga van A naar G via drie ribben. Bijvoorbeeld $AB \rightarrow BC \rightarrow CG$. De lengte van deze drie ribben gebruik je om AG te berekenen.

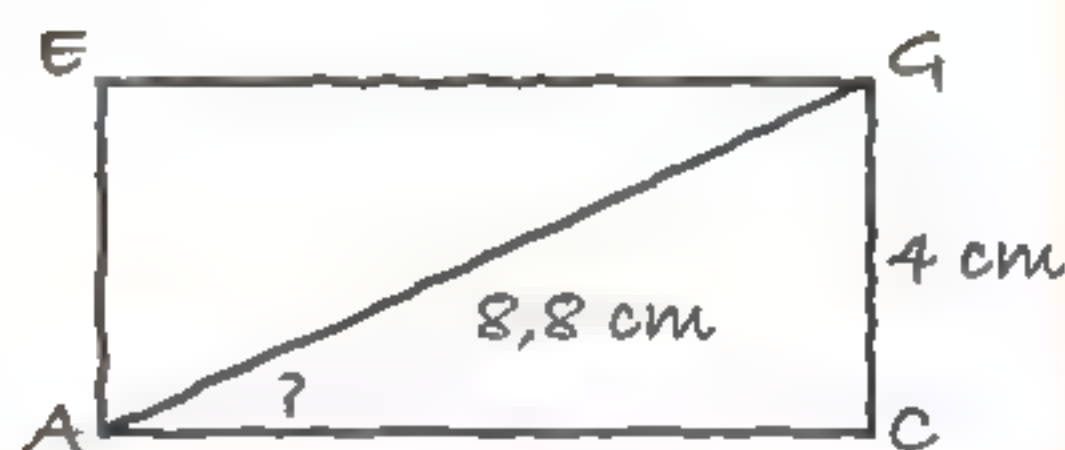


- b** $\angle CAG$ ligt in diagonaalvlak $ACGE$.
Maak een schets van dat diagonaalvlak.
Teken hierin AG .
Van $\angle CAG$ weet je de overstaande rechthoekszijde en de schuine zijde, **SOS**, gebruik dus sinus.

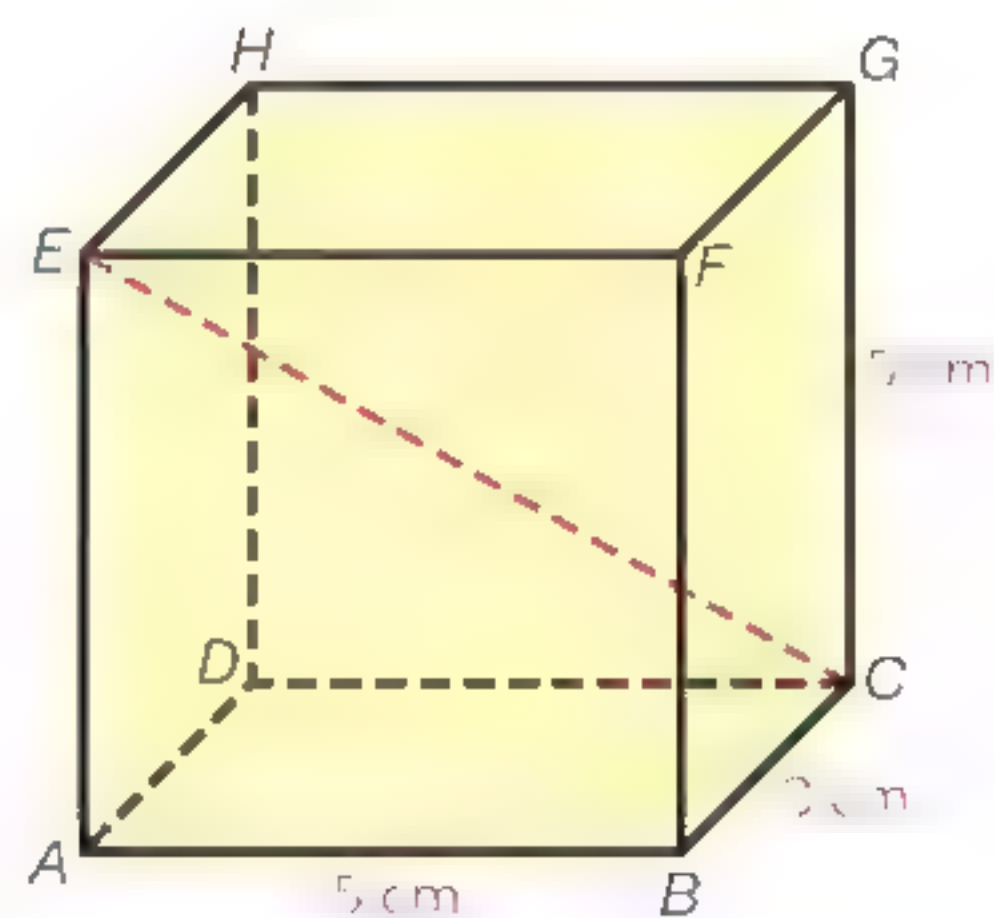


Uitwerking

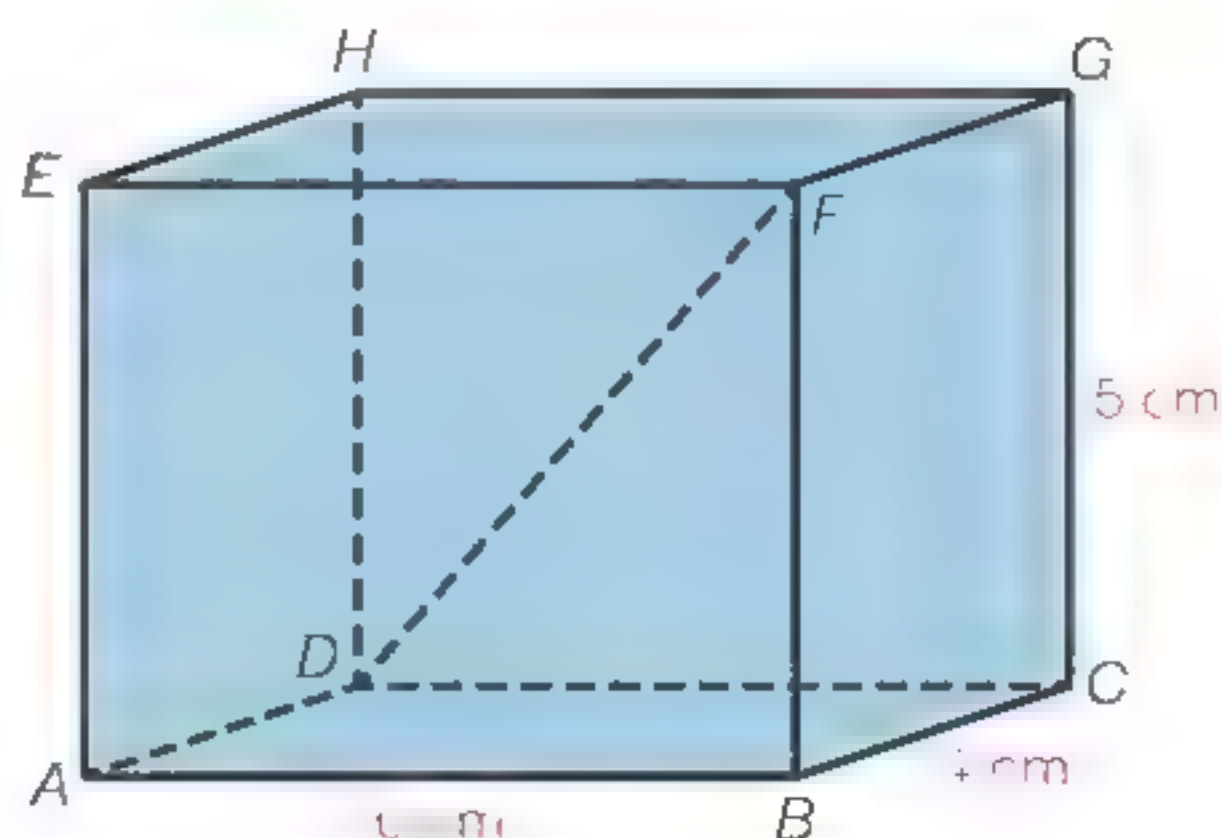
- a** $rhz^2 = 36$
 $rhz^2 = 25$
 $rhz^2 = 16$
 $\hline +$
 $? sz^2 = 77$
 $sz = \sqrt{77} = 8,774...$
 $AG = 8,8 \text{ cm}$
- b** Zie de schets hiernaast.
- $\sin \angle CAG = \frac{4}{8,8}$
 $\angle CAG = 27^\circ$



- 3** Je gaat $\angle AEC$ berekenen in de balk hiernaast. Hiervoor heb je de lengte van AE en CE nodig.
- a** Bereken CE . Gebruik de verlengde stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.
- b** Maak een schets van diagonaalvlak $ACGE$ en teken CE in de schets. Zet alle maten erbij die je weet.
- c** Bereken $\angle AEC$. Gebruik de cosinus.



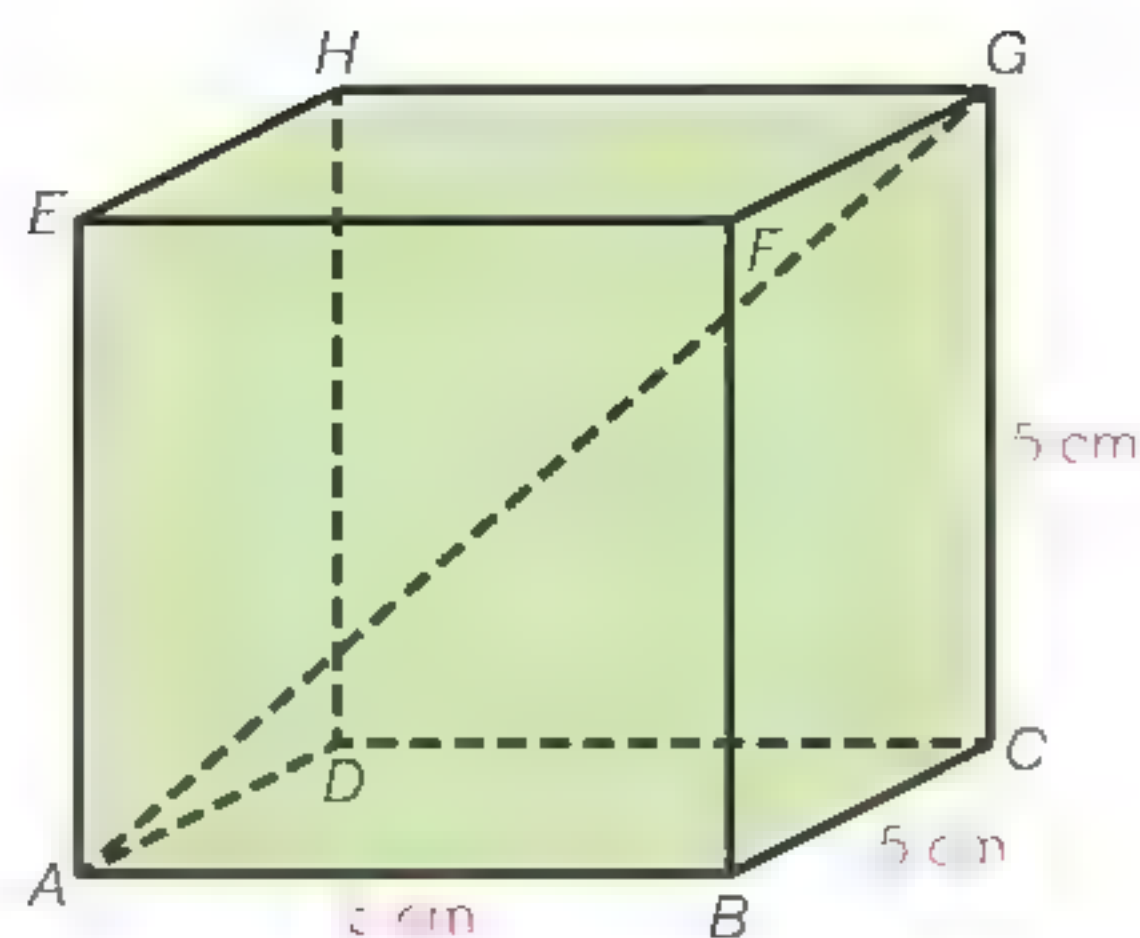
- 6** Bekijk de balk hiernaast.
- a** Bereken DF . Rond af op één decimaal.
- b** In welk diagonaalvlak ligt $\angle HDF$?
- c** Maak een schets van dit diagonaalvlak.
- d** Bereken $\angle HDF$.





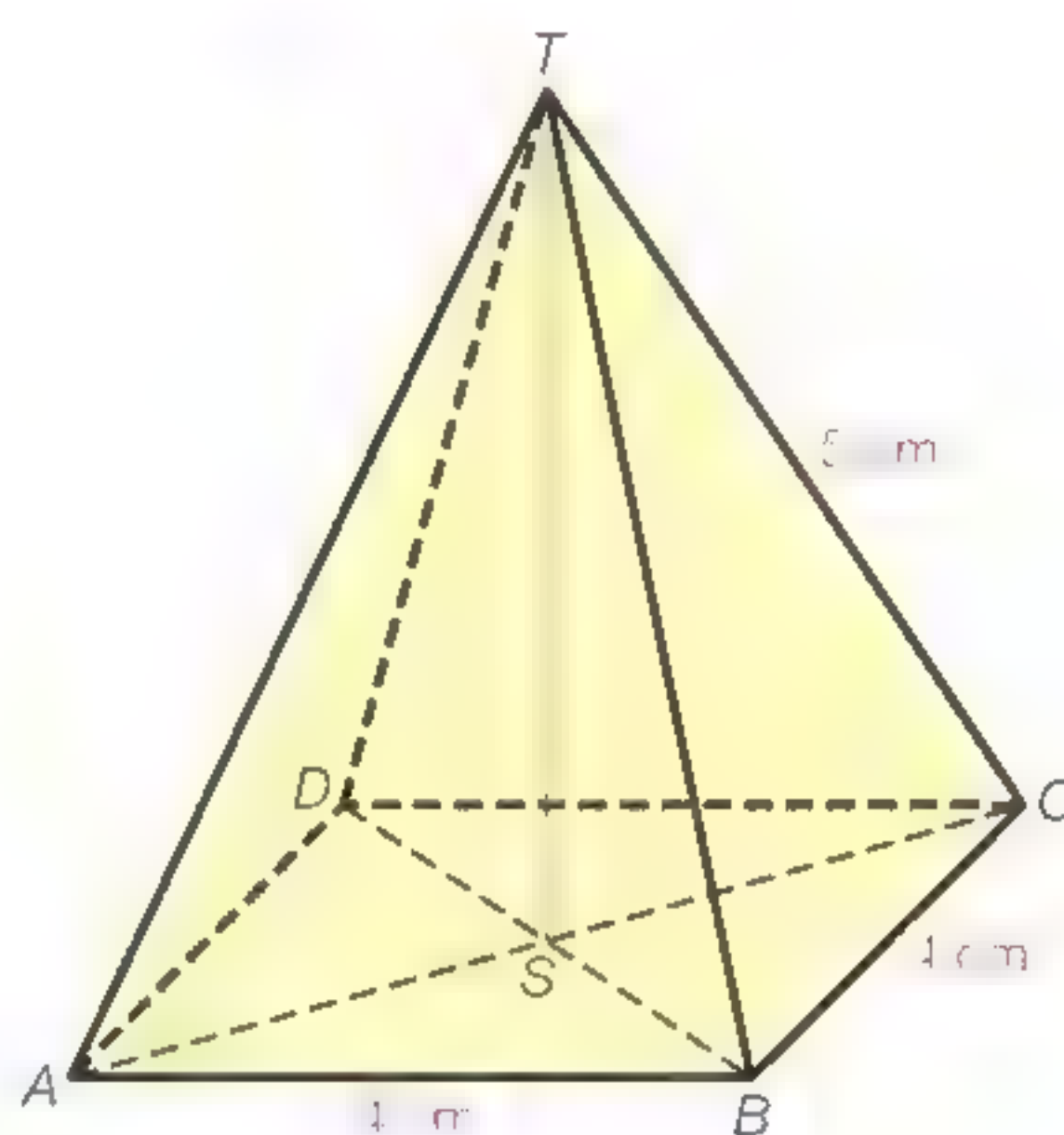
Hiernaast is een kubus met ribben van 5 cm getekend.

- Bereken AG . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle BAG$.



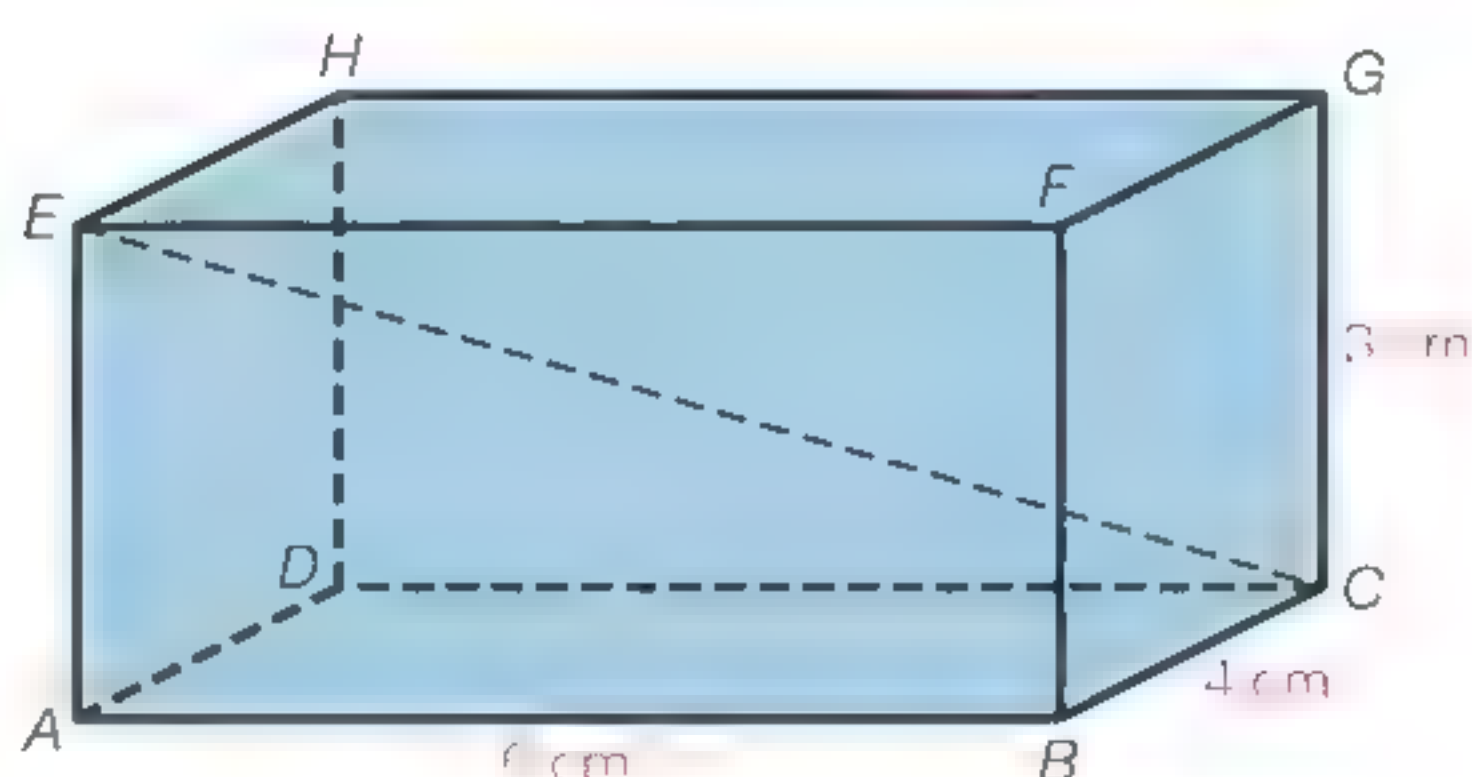
Van de piramide hiernaast is het grondvlak $ABCD$ een vierkant met zijden van 4 cm. Alle opstaande ribben zijn 5 cm.

- Bereken AC en AS . Rond af op twee decimalen.
- Bereken $\angle TAS$.



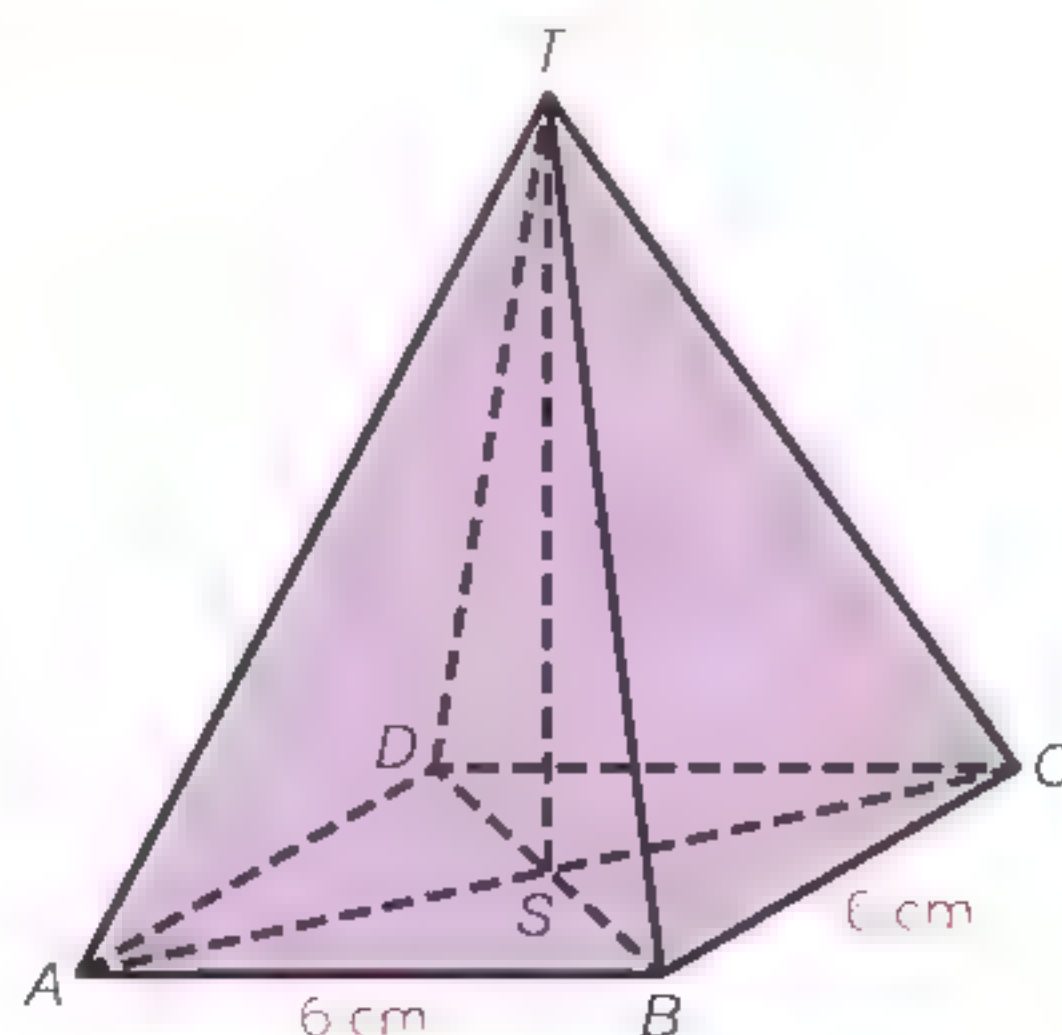
Bekijk de balk hiernaast.

- Bereken CE . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle DCE$.



Van de regelmatige piramide hiernaast is het grondvlak een vierkant met zijden van 6 cm. De hoogte $ST = 8$ cm.

- Bereken AS . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle SAT$.



Thema 10 Lengte lijnstukken in balken

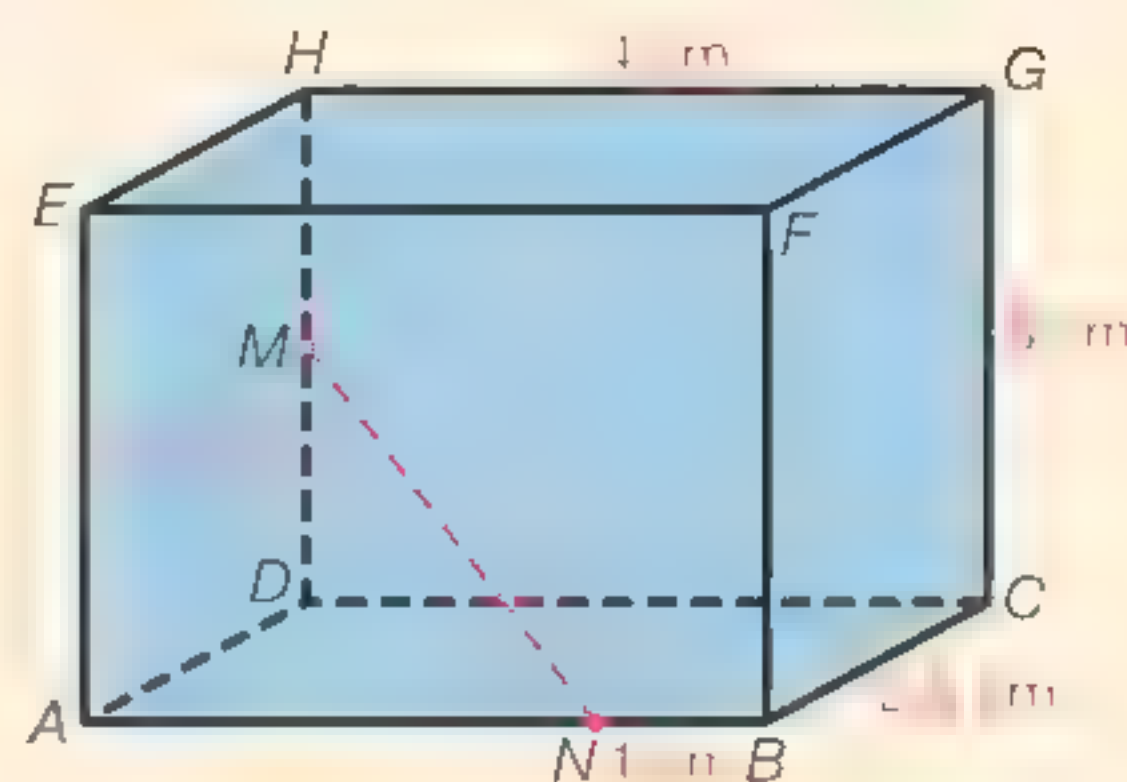
Zijn twee punten op de ribben van een balk verbonden door een lijnstuk, dan kun je met de verlengde stelling van Pythagoras de lengte van dat lijnstuk berekenen. Je gebruikt de kortste route van het ene punt, via de ribben van de balk, naar het andere punt.

Voorbeeld

Bereken de lengte van NM . Rond af op één decimaal.

Aanpak

Ga van N naar M over drie ribben of gedeeltes van ribben, dus $NA \rightarrow AD \rightarrow DM$ met $NA = 3 \text{ cm}$, $AD = 2,5 \text{ cm}$ en $DM = 1,5 \text{ cm}$.



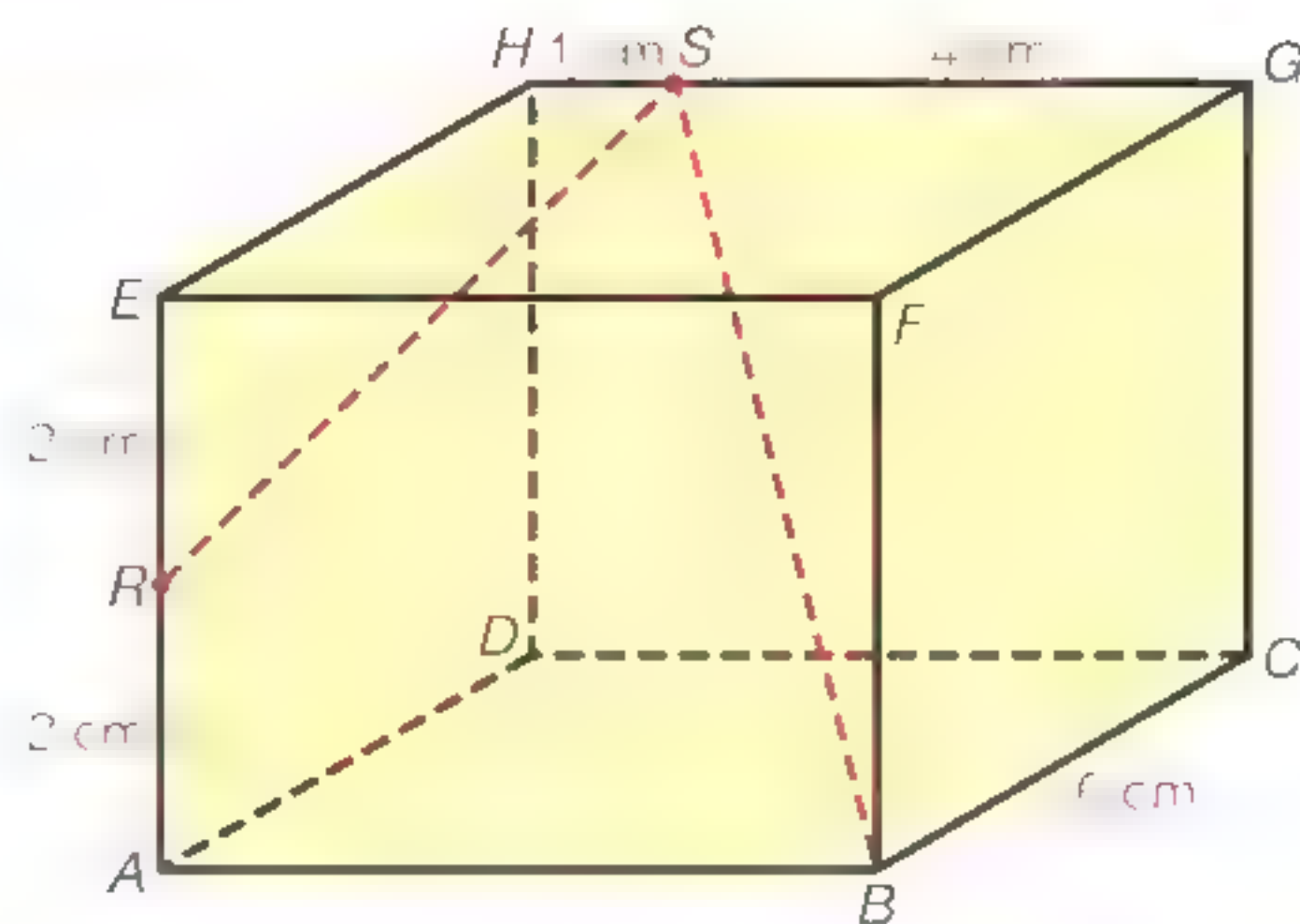
Uitwerking

$$\begin{array}{r}
 rhz^2 = 9 \\
 rhz^2 = 6,25 \\
 rhz^2 = 2,25 \\
 \hline
 ? sz^2 = 17,5 \\
 sz = \sqrt{17,5} = 4,183... \\
 NM = 4,2 \text{ cm}
 \end{array}$$



Bekijk de balk hiernaast.

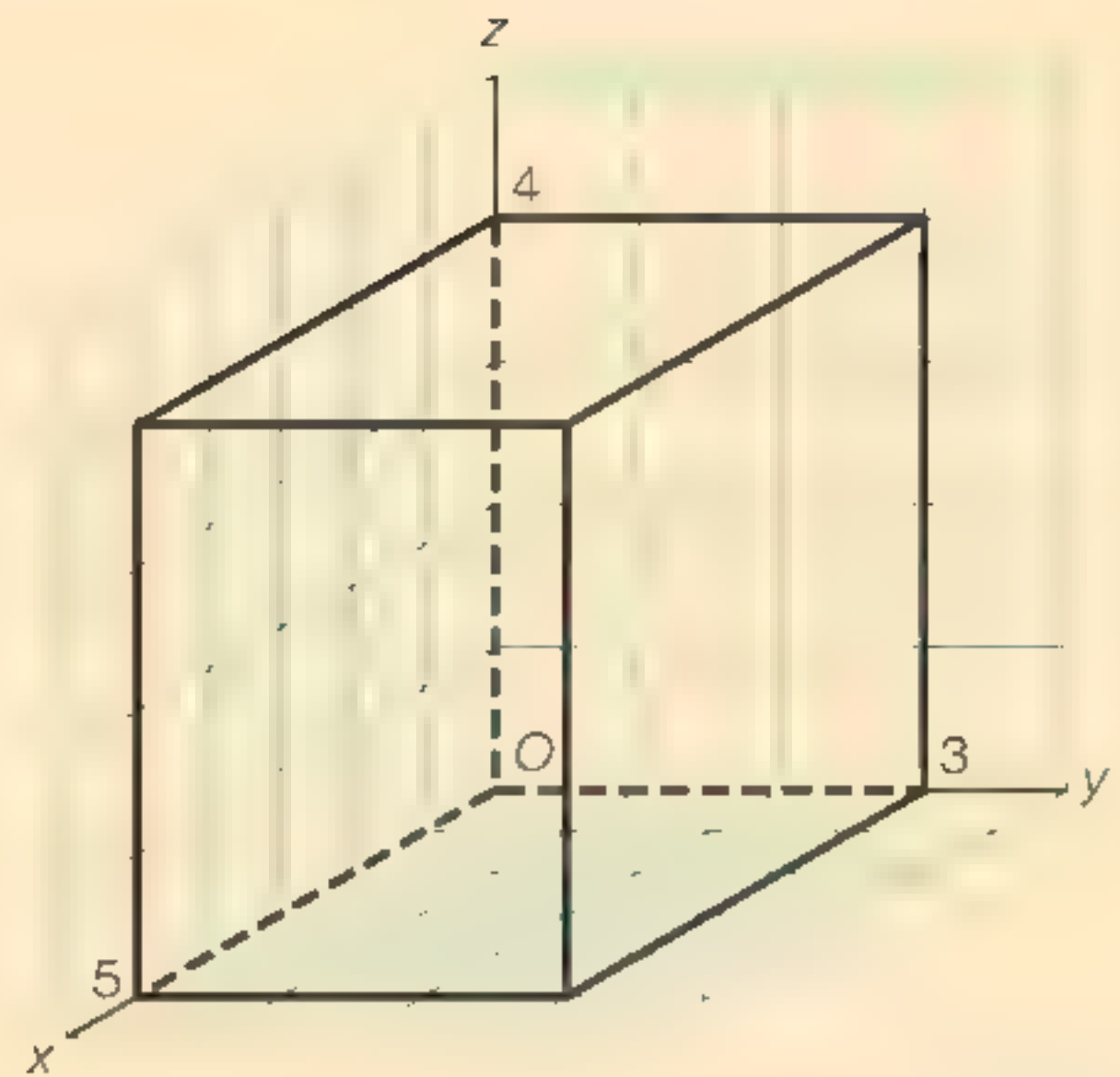
- Bereken de lengte van BS . Rond af op één decimaal.
- Bereken de lengte van RS . Rond af op één decimaal.



10.3 Coördinaten in de ruimte

Thema 1 Driedimensionaal assenstelsel

Ruimte heeft drie dimensies, een lengte een breedte en een hoogte. Daarom heb je in de ruimte drie assen nodig, de x -as, de y -as en de z -as. Om een punt in de ruimte aan te geven, gebruik je drie coördinaten, de x -coördinaat, de y -coördinaat en de z -coördinaat. Een assenstelsel in de ruimte heet een **driedimensionaal assenstelsel**.



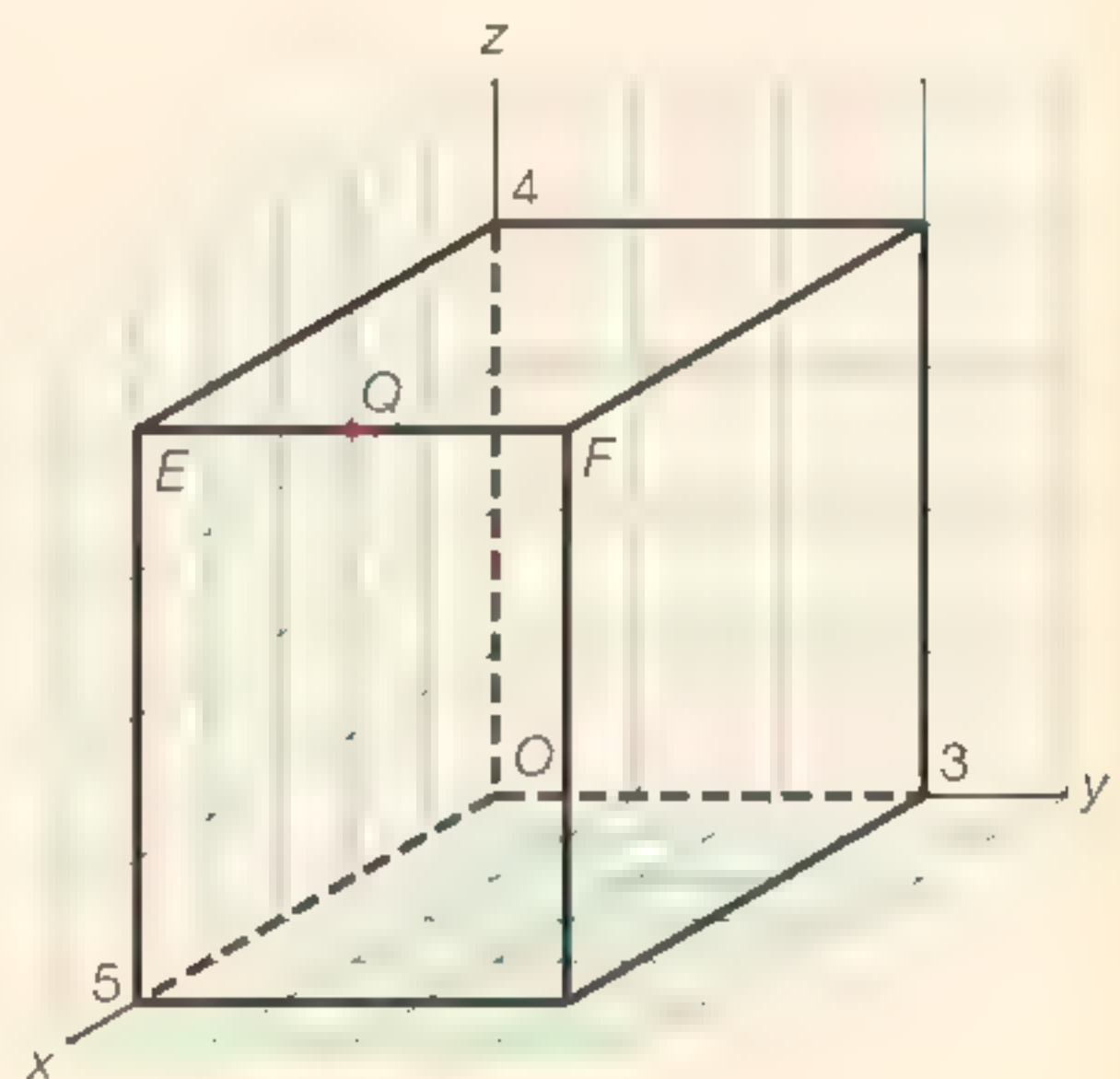
Voorbeeld

In de balk hiernaast is Q het midden van EF .

- a Welke coördinaten horen bij punt F ?
- b Welke coördinaten horen bij punt Q ?

Aanpak

- a Voor punt F ga je vanuit de oorsprong
 - 5 stappen in de x -richting
 - 3 stappen in de y -richting
 - 4 stappen in de z -richting.
- b Voor punt Q ga je vanuit de oorsprong
 - 5 stappen in de x -richting
 - 1,5 stap in de y -richting
 - 4 stappen in de z -richting.

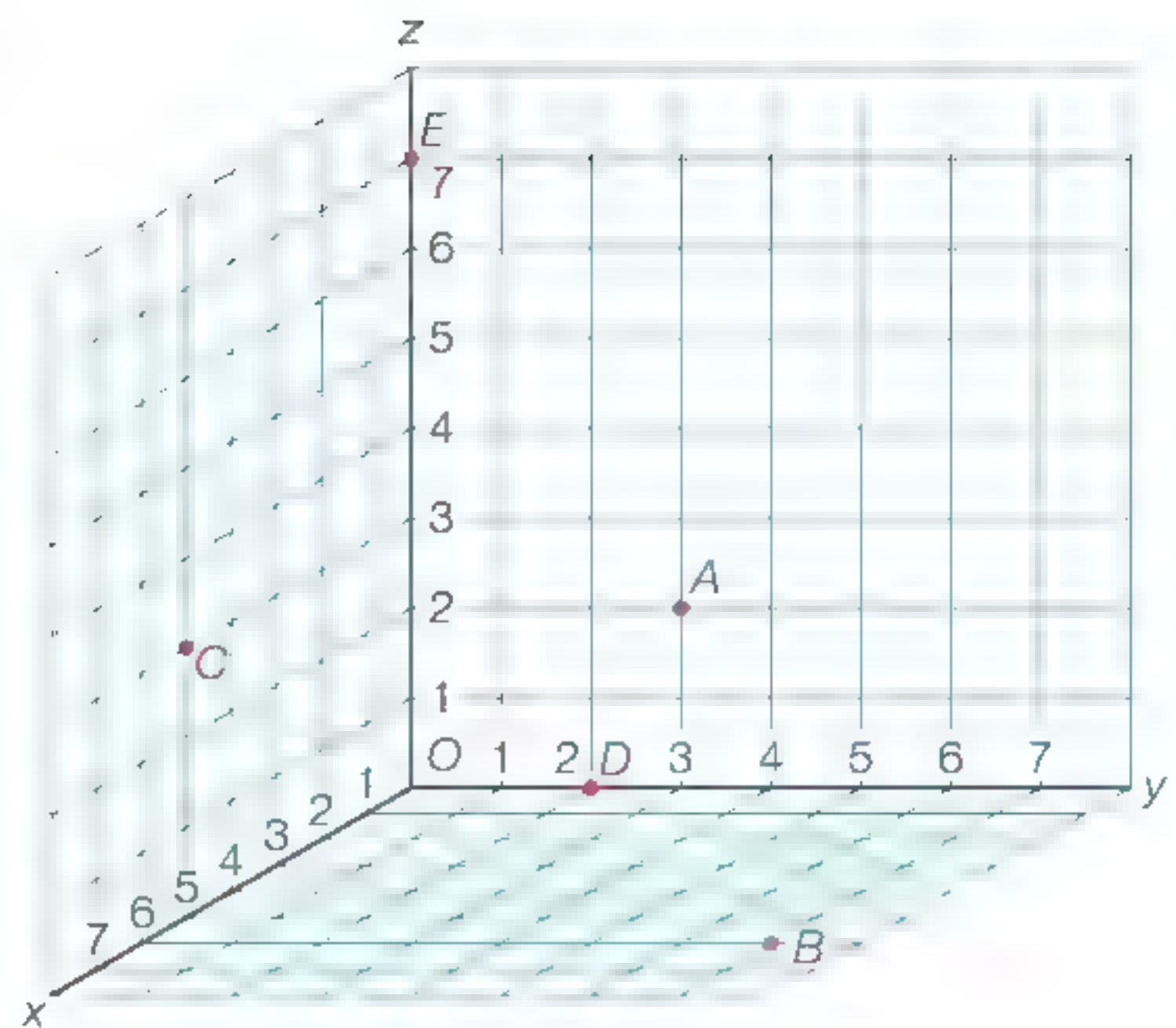


Uitwerking

- a De coördinaten van punt F zijn $(5, 3, 4)$.
- b De coördinaten van punt Q zijn $(5, 1\frac{1}{2}, 4)$.

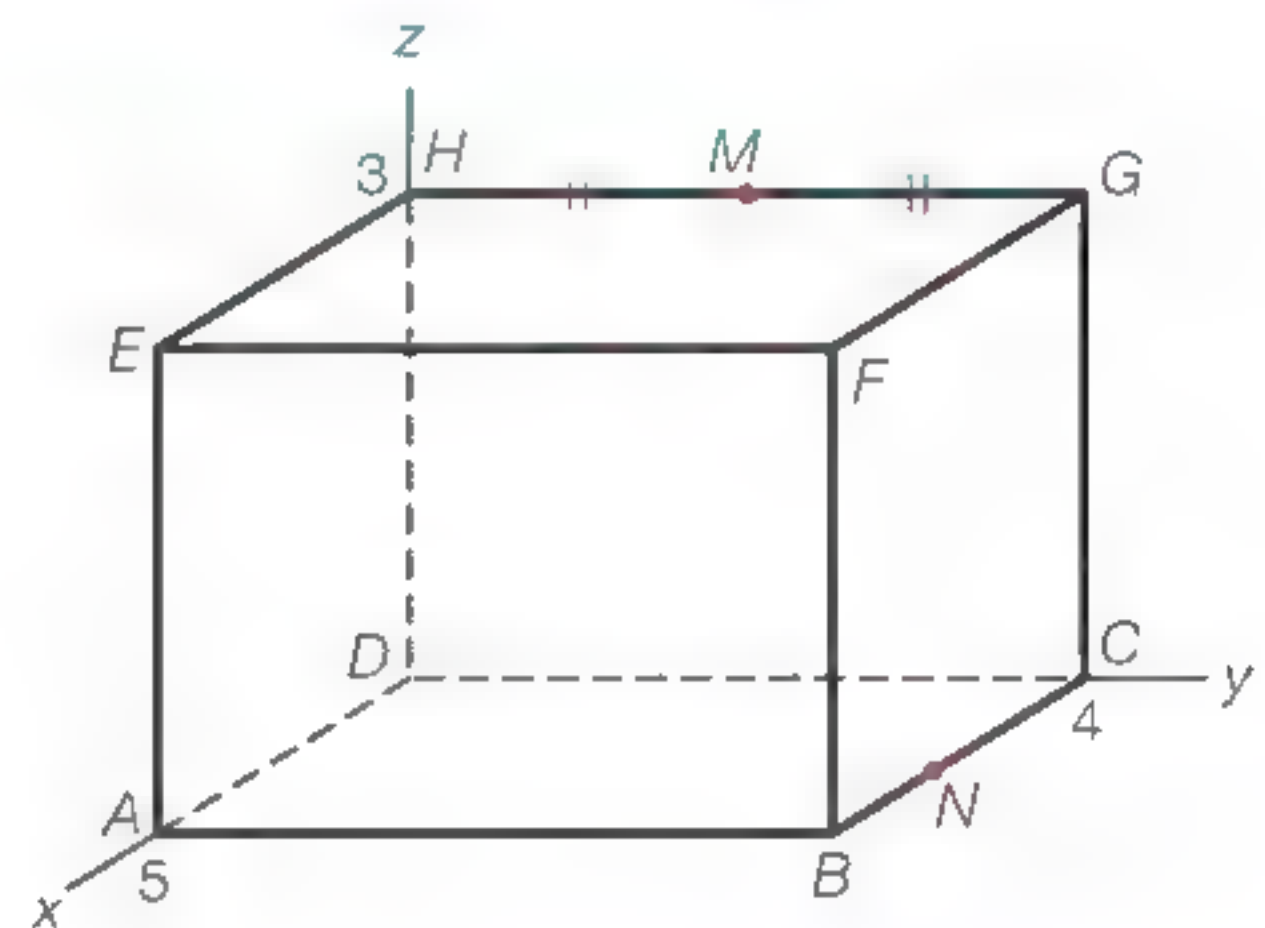


- a** In de figuur hiernaast zie je drie assen. Schrijf de namen van de assen op.
- b** Leg uit dat het punt A de coördinaten $(0, 3, 2)$ heeft.
- c** Schrijf de coördinaten op van de punten B , C , D en E .

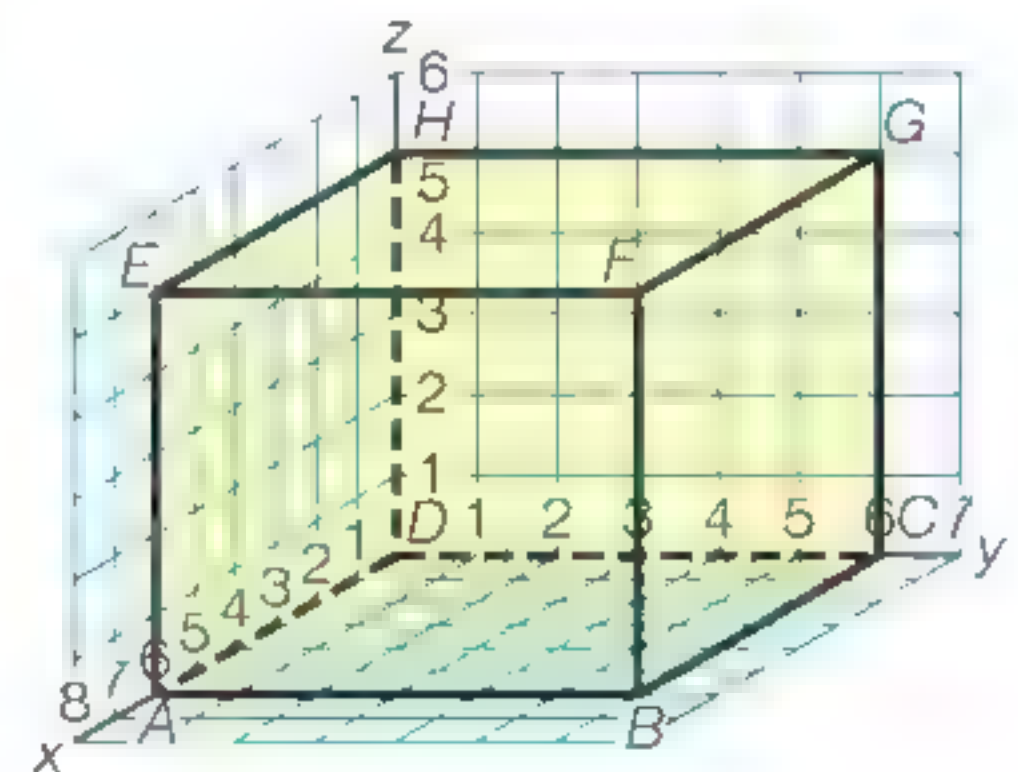


Bij hoekpunt H van de balk hiernaast horen de coördinaten $(0, 0, 3)$.

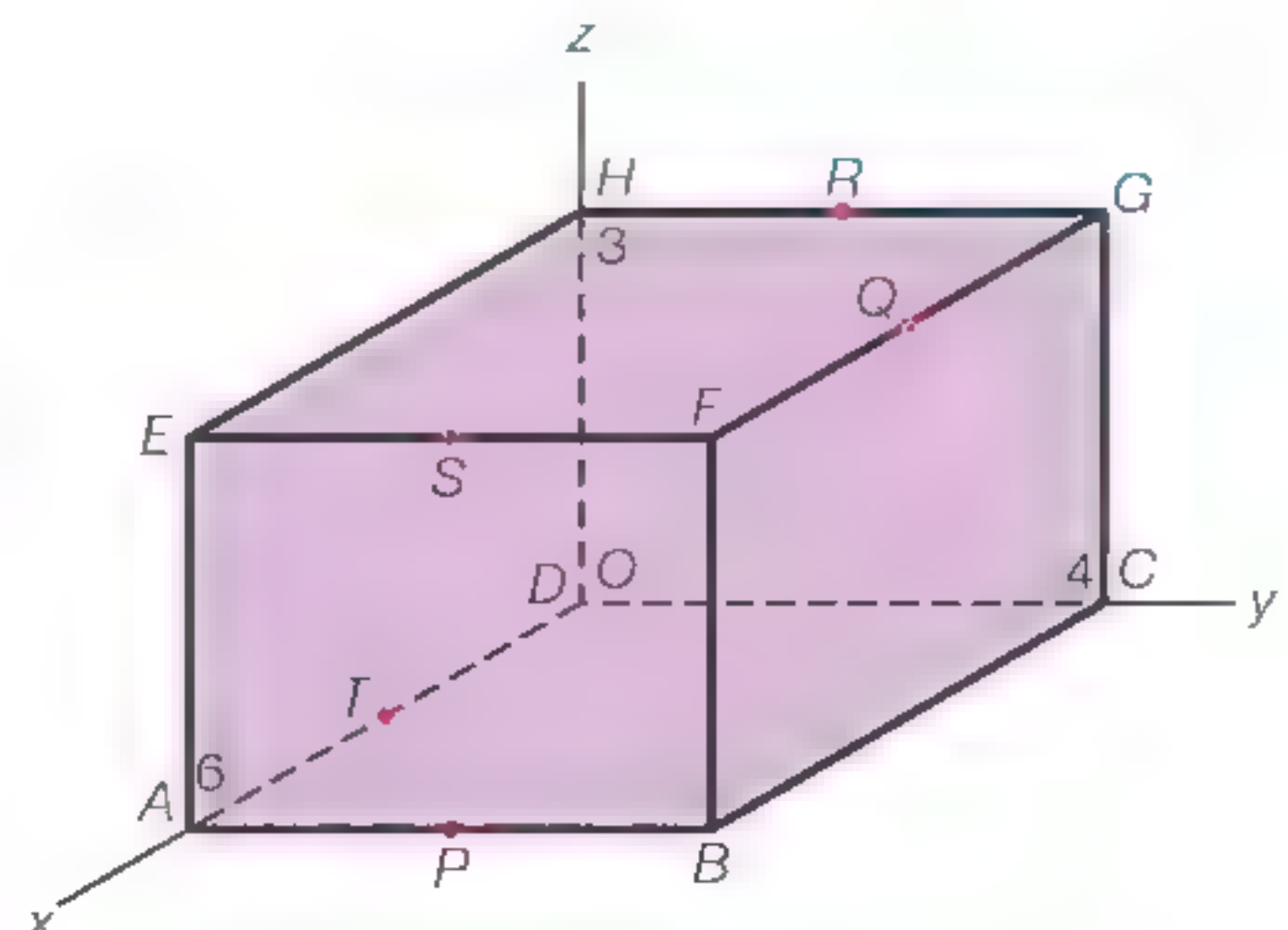
- a** Welke coördinaten horen bij hoekpunt A ?
- b** Welke coördinaten horen bij hoekpunt C ?
- c** Punt M is het midden van ribbe GH . Welke coördinaten horen bij M ?
- d** De x -coördinaat van punt N is 4. Schrijf de coördinaten van N op.



In het assenstelsel hiernaast is een balk getekend. Punt D staat in de oorsprong. Daarom heeft D de coördinaten $(0, 0, 0)$. Schrijf de coördinaten op van de andere hoekpunten van de balk.



De punten P , Q , R , S en T zijn de middens van ribben van de balk hiernaast. Schrijf de coördinaten van die punten op.



Uitwerkingen

1 [HAVO-A] Procenten

Bladzijde 4



a $0,49 \times 369,5 \approx 181,1$

b $1,21 \times 89,23 \approx 108,0$

c $0,34 \times 921 \approx 313,1$



a $0,89 \times 59,92 \approx €53,33$

b $1,43 \times 89,98 \approx €128,67$

c $0,0045 \times 598,20 \approx €2,69$

d $0,005 \times 2346,99 \approx €11,73$

Bladzijde 5



a 1,058

b 0,875

c $1,12 \times 750 = 840$

d $0,84 \times 550 = 462$

Bladzijde 6



a De vermenigvuldigingsfactor is 1,06.

b De vermenigvuldigingsfactor is 0,35.

c De vermenigvuldigingsfactor is 0,9875.

d De vermenigvuldigingsfactor is 2,201.

e De vermenigvuldigingsfactor is 1,0035.

f De vermenigvuldigingsfactor is 0,895.



De nieuwe prijs is $0,865 \times 385,95 \approx €333,85$.



Het huis is na een jaar $1,115 \times 249\,500 = €278\,192,50$ waard.



a $0,059 \times 50 = 2,95$

b De nieuwe prijs is $0,921 \times 29,95 \approx €27,58$.

c De vermenigvuldigingsfactor is 1,047.

d Je krijgt $0,965 \times 1600 = 1544$.



a $\frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$

b $\frac{821}{5390} \times 100\% \approx 15,2\%$

Bladzijde 7



a $\frac{0,3}{2} \times 100\% = 15\%$

c $\frac{1}{9,3} \times 100\% \approx 10,8\%$


b $\frac{4,9}{34,3} \times 100\% \approx 14,3\%$


d $\frac{5,42}{89,23} \times 100\% \approx 6,1\%$





a In totaal zitten er $1238 + 324 = 1562$ mensen in het publiek.

b $\frac{324}{1562} \times 100\% \approx 20,7\%$ van het publiek is vrouw.


-  **a** $\frac{97}{218} \times 100\% \approx 44,5\%$
b $0,43 \times 18\,500 = 7955$
c $0,003 \times 692,55 \approx \text{€}2,08$

-  **a** $2,45 \times 295 = 722,75$
b $\frac{234,98}{975,39} \times 100\% \approx 24,1\%$
c $0,029 \times 21\,653 \approx \text{€}627,94$


-  **a** $\frac{18}{28} \times 100\% \approx 64,3\%$ komt met de fiets naar school.
b $\frac{8}{28} \times 100\% \approx 28,6\%$ komt met het openbaar vervoer.

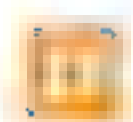
-  **a** Het bedrag is nu $1,41 \times 296 = \text{€}417,36$.
b $\frac{45}{1269} \times 100\% \approx 3,5\%$
c De vermenigvuldigingsfactor is 0,787.
d $\frac{6}{27} \times 100\% \approx 22,2\%$ van de leerlingen draagt een bril.
e $0,62 \times 829,45 \approx \text{€}514,26$
f Het huis is nu $1,062 \times 267\,500 = \text{€}284\,085$ waard.
g De webshop heeft nu $1,25 \times 1240 = 1550$ artikelen in het assortiment.

Bladzijde 8

-  **a** OUD = 560 en NIEUW = 620.
 $\frac{620 - 560}{560} \times 100\% \approx 10,7\%$, dus de procentuele toename is 10,7%.
b OUD = 380 en NIEUW = 300.
 $\frac{300 - 380}{380} \times 100\% \approx -21,1\%$, dus de procentuele afname is 21,1%.

Bladzijde 9

-  **a** OUD = 18 en NIEUW = 20,5.
 $\frac{20,5 - 18}{18} \times 100\% \approx 13,9\%$, dus de procentuele toename is 13,9%.
b OUD = 412 en NIEUW = 368.
 $\frac{368 - 412}{412} \times 100\% \approx -10,7\%$, dus de procentuele afname is 10,7%.
c OUD = 0,075 en NIEUW = 0,092.
 $\frac{0,092 - 0,075}{0,075} \times 100\% \approx 22,7\%$, dus de procentuele toename is 22,7%.
d OUD = 5,12 en NIEUW = 4,56.
 $\frac{4,56 - 5,12}{5,12} \times 100\% \approx -10,9\%$, dus de procentuele afname is 10,9%.



oud = 21,99 en nieuw = 23,95.

$\frac{23,95 - 21,99}{21,99} \times 100\% \approx 8,9\%$, dus de rekenmachine is 8,9% duurder geworden.



oud = 12 345 en nieuw = 10 846.

$\frac{10846 - 12345}{12345} \times 100\% \approx -12,1\%$, dus de auto is 12,1% goedkoper geworden.



a oud = 1200 en nieuw = 1059.

$\frac{1059 - 1200}{1200} \times 100\% \approx -11,8\%$, dus de scooter is 11,8% goedkoper geworden.

b oud = 1379 en nieuw = 1212.

$\frac{1212 - 1379}{1379} \times 100\% \approx -12,1\%$, dus het aantal leerlingen is met 12,1% gedaald.

c oud = 45 en nieuw = 32.

$\frac{32 - 45}{45} \times 100\% \approx -28,9\%$, dus de zonnebril is 28,9% goedkoper geworden.

d oud = 28,50 en nieuw = 29,50.

$\frac{29,50 - 28,50}{28,50} \times 100\% \approx 3,5\%$, dus een kaartje is 3,5% duurder geworden.



a De vermenigvuldigingsfactor is 0,77.

b $\frac{85}{429} \times 100\% \approx 19,8\%$

c oud = 28 en nieuw = 29,5.

$\frac{29,5 - 28}{28} \times 100\% \approx 5,4\%$, dus de procentuele toename is 5,4%.

d In havo 4 zitten $0,12 \times 1250 = 150$ leerlingen.

e $\frac{12}{31} \times 100\% \approx 38,7\%$ van de leerlingen heeft een scooter.

f oud = 933 en nieuw = 859.

$\frac{859 - 933}{933} \times 100\% \approx -7,9\%$, dus de procentuele afname is 7,9%.

Bladzijde 11



a 12% toename, dus delen door 1,12.

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{550}{1,12} \approx 491$.

b 16% afname, dus delen door 0,84.

De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{340}{0,84} \approx 405$.

 **a** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{380}{1,07} \approx 355$.

b De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{185}{0,91} \approx 203$.

c Er was eerst $\frac{250}{0,82} \approx 305$.

 **a** De oude prijs is $\frac{23}{1,05} \approx \text{€}21,90$.

b Vorig jaar zaten er $\frac{230}{0,902} \approx 255$ leerlingen in de brugklas.

c Grootten heeft $\frac{3028}{1,038} \approx 2917$ woningen gebouwd in 2019.

 **a** De nieuwe prijs is $1,08 \times 25 = \text{€}27$.

b De prijs voor de prijsdaling is $\frac{823}{0,86} \approx \text{€}956,98$.

c Er zijn $0,14 \times 162 \approx 23$ docenten ouder dan 60 jaar.

d OUD = 933 en NIEUW = 859.

$\frac{859 - 933}{933} \times 100\% \approx -7,9\%$, dus de procentuele afname is 7,9%.

e De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{23}{0,85} \approx 27$.

Bladzijde 12

 **a** 43% is gelijk aan 750, dus delen door 0,43.

Het totaal is $\frac{750}{0,43} \approx 1744$.


b 21,2% is gelijk aan 489, dus delen door 0,212.

Het totaal is $\frac{489}{0,212} \approx 2307$.

Bladzijde 13

 **a** De totale hoeveelheid is $\frac{715}{0,095} \approx 7526$.

b De totale hoeveelheid is $\frac{673}{0,358} \approx 1880$.

 **a** Er zijn $\frac{178}{0,782} \approx 228$ vierdeklassers.

b De oude huurprijs is $\frac{32,45}{0,039} \approx \text{€}832,05$.

28

- a** $0,057 \times 132 = 7,524$
- b** De totale hoeveelheid is $\frac{132}{0,057} \approx 2316$.
- c** De oude prijs is $\frac{899}{1,075} \approx \text{€}836,28$.
- d** $\frac{87,3}{2694,8} \times 100\% \approx 3,2\%$
- e** De sportschool heeft $\frac{49}{0,203} \approx 241$ leden.

29

- a** $\frac{32}{85} \times 100\% \approx 37,6\%$ van de docenten is jonger dan 40 jaar.
- b** OUD = 13,7 en NIEUW = 12,4.
 $\frac{12,4 - 13,7}{13,7} \times 100\% \approx -9,5\%$, dus de procentuele afname is 9,5%.
- c** De oorspronkelijke hoeveelheid is $\frac{13,7}{1,085} \approx 12,6$.
- d** $\frac{1\,290\,000}{0,538} \approx 2\,398\,000$ Nederlanders kozen afgelopen zomer voor een kampeervakantie in het buitenland.
- e** Dit jaar zitten er $0,884 \times 118 \approx 104$ leerlingen op de basisschool.
- f** Vorig jaar waren $\frac{28}{0,22} \approx 127$ jongeren lid van de tennisclub.
Dus dit jaar zijn $127 + 28 = 155$ jongeren lid van de tennisclub.

2 Algebra deel 1

2.1 Herleiden

Bladzijde 14

a $p + p + p = 3p$

b $x + x + x + x = 4x$

c $a + a + a + a + a + a + a = 7a$

a $5a = a + a + a + a + a$

b $4b = b + b + b + b$

c $7p = p + p + p + p + p + p + p$

Bladzijde 15

a $15a \cdot 3b = 45ab$

b $25p \cdot -3q = -75pq$

c $-7b \cdot 7a = -49ab$

d $-2p \cdot -15q = 30pq$

e $x \cdot -5 = -5x$

f $-k \cdot -l = kl$

a $8x \cdot y \cdot 4z = 32xyz$

b $-3b \cdot -a \cdot 3a = 9a^2b$

c $-2a \cdot -8b \cdot -5 = -80ab$

d $5k \cdot 3l \cdot -m = -15klm$

e $18y \cdot 0 \cdot -2x = 0$

f $-ac \cdot -8b = 8abc$

Bladzijde 16

a $6a + 11a = 17a$

b $-22c + 21c = -c$

c $-96x + 4x = -92x$

d $19y - y = 18y$

e $2q - 4q = -2q$

f $kl + kl = 2kl$

g $-ab + ab = 0$

h $x - 3x + 7x = 5x$

i $y + 2y + 3y = 6y$

j $18z - 2z + z = 17z$

Bladzijde 17

a $5b \cdot -5c = -25bc$

b $5a + 11a = 16a$

c $8y \cdot 0 \cdot 5z = 0$

d $-8b \cdot 5b \cdot -5 = 200b^2$

e $k + 3k + 5k = 9k$

f $-a \cdot -c = ac$

a $3a + 10a = 13a$

b $3a + 10b$ kan niet

c $8b - b = 7b$

d $3p + 11$ kan niet

e $ac - 6ac = -5ac$

f $2xy + 8xy = 10xy$

g $6p + 6p = 12p$

h $6a - 6b$ kan niet

i $3a - 3a = 0$

j $ab + bc$ kan niet

k $18ab + 6ac$ kan niet

l $8p - 7p = p$

m $4q + 4p$ kan niet

n $5b - 3a$ kan niet

Bladzijde 18

- 8** a $5a \cdot 12a = 60a^2$ i $15a + 12a = 27a$
 b $a + 4b$ kan niet j $16ab - 16$ kan niet
 c $5x \cdot 7xy = 35x^2y$ k $a \cdot 4b = 4ab$
 d $3ab + 5bc$ kan niet l $7xy + 4x$ kan niet
 e $12ac \cdot 6a = 72a^2c$ m $3ab - ab = 2ab$
 f $8p - 8p = 0$ n $12a \cdot 6a = 72a^2$
 g $q + 4p$ kan niet o $8p - 3q$ kan niet
 h $5 - 3a$ kan niet p $5pq + 9pq = 14pq$

- 9** a $17a = 7a + 10a$ e $25xy = x \cdot 25y$
 b $-24ac = 12a \cdot -2c$ f $14klm = 7klm + 7klm$
 c $45x = 5x + 40x$ g $27ab = 9a \cdot 3b$
 d $20p = 55p - 35p$ h $4xy = 16xy - 12xy$

2.2 Haakjes wegwerken**Bladzijde 19**

- 10** a $5(a + c) = 5a + 5c$ e $5a(2b + c) = 10ab + 5ac$
 b $8(2a + b) = 16a + 8b$ f $3p(x + 3) = 3px + 9p$
 c $a(3b + c) = 3ab + ac$ g $4a(b + \frac{1}{2}) = 4ab + 2a$
 d $x(2y + 3) = 2xy + 3x$ h $3c(a + 1) = 3ac + 3c$

Bladzijde 20

- 11** a $-4(x + 2y) = -4x - 8y$ e $-3a(2b + c) = -6ab - 3ac$
 b $4(x - 2y) = 4x - 8y$ f $5a(3b - c) = 15ab - 5ac$
 c $-4(x - 3) = -4x + 12$ g $-2p(3q - 1) = -6pq + 2p$
 d $-4(2x + 8) = -8x - 32$ h $5q(2p + 8) = 10pq + 40q$

Bladzijde 21

- 12** a $3(a + 2b) - 6a = 3a + 6b - 6a = -3a + 6b$
 b $-5(a - 2b) + 6a = -5a + 10b + 6a = a + 10b$
 c $5(a - 2b) + 3(2a - b) = 5a - 10b + 6a - 3b = 11a - 13b$
 d $8(a - b) - 5(a - 3) = 8a - 8b - 5a + 15 = 3a - 8b + 15$
 e $2a - (5 + 2a) = 2a - 5 - 2a = -5$
 f $-3(a - 1) - 3a = -3a + 3 - 3a = -6a + 3$
- 13** a $3a - 2(a + 6) = 3a - 2a - 12 = a - 12$
 b $5a(c + 2) = 5ac + 10a$
 c $3 + a - 2(a + 6) = 3 + a - 2a - 12 = -a - 9$
 d $8p(2r + s) = 16pr + 8ps$
 e $3(a - 1) - (a - 8) = 3a - 3 - a + 8 = 2a + 5$
 f $-(2x - 3) = -2x + 3$

- g** $4(a-1) - 2a + 8 = 4a - 4 - 2a + 8 = 2a + 4$
h $-4(x-2y) - x(y-3) = -4x + 8y - xy + 3x = -x + 8y - xy$
i $-b(2-a) + b - ab = -2b + ab + b - ab = -b$
j $-5(-3p+q) = 15p - 5q$

Bladzijde 22

- a** $(p+5)(q+4) = pq + 4p + 5q + 20$
b $(x+12)(y+2) = xy + 2x + 12y + 24$
c $(a+3)(a+8) = a^2 + 8a + 3a + 24 = a^2 + 11a + 24$
d $(b+15)(b+3) = b^2 + 3b + 15b + 45 = b^2 + 18b + 45$
f $(x+4)(x+3) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$
g $(a+2)(a+30) = a^2 + 30a + 2a + 60 = a^2 + 32a + 60$

- a** $5(a+5) - 6 = 5a + 25 - 6 = 5a + 19$
b $(x+5)(x-2) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3x - 10$
c $-6(4a+8) + 3 = -24a - 48 + 3 = -24a - 45$
d $(y+4)(y-7) = y^2 - 7y + 4y - 28 = y^2 - 3y - 28$
e $3x - 2y + x(y-5) = 3x - 2y + xy - 5x = -2x - 2y + xy$
f $3(a+7) - 9 = 3a + 21 - 9 = 3a + 12$
g $(x+3)(x-1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$
h $-2(3a+8) - 3a = -6a - 16 - 3a = -9a - 16$

2.3 Letterrekenen met breuken

Bladzijde 23

- a** $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$
b $\frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$
c $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
d $\frac{2}{15} - \frac{7}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$
e $\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
f $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Bladzijde 24

- a** $\frac{3}{7} + \frac{1}{4} = \frac{12}{28} + \frac{7}{28} = \frac{19}{28}$
b $\frac{2}{5} - \frac{7}{10} = \frac{4}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{3}{10}$
c $\frac{5}{8} - \frac{2}{3} = \frac{15}{24} - \frac{16}{24} = -\frac{1}{24}$
d $\frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$
a $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$
b $\frac{3}{10} - \frac{7}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$
c $\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
d $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$

Bladzijde 25

19 a $\frac{3b}{3d} = \frac{b}{d}$

b $\frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}$

20 a $\frac{15a}{3} + 5a = 5a + 5a = 10a$

b $\frac{6xy}{3y} - x = 2x - x = x$

21 a $\frac{-16x}{4} + 4x = -4x + 4x = 0$

b $\frac{28ab}{7ab} - 1 = 4 - 1 = 3$

c $\frac{pq}{pr} = \frac{q}{r}$

d $\frac{5xy}{25xz} = \frac{y}{5z}$

c $-\frac{ab}{b} - 2a = -a - 2a = -3a$

d $\frac{15ac}{3c} - \frac{50ab}{5b} = 5a - 10a = -5a$

c $\frac{36pq}{12q} + 2p = 3p + 2p = 5p$

d $\frac{-21a}{7a} - \frac{12p}{3p} = -3 - 4 = -7$

Bladzijde 26

22 a $\frac{8}{3p} + \frac{7}{3p} = \frac{15}{3p} = \frac{5}{p}$

b $\frac{5}{2x} - \frac{7}{2x} = -\frac{2}{2x} = -\frac{1}{x}$

c $\frac{2}{p} + \frac{4}{q} = \frac{2q}{pq} + \frac{4p}{pq} = \frac{2q + 4p}{pq}$

d $\frac{6}{k} - \frac{5}{m} = \frac{6m}{km} - \frac{5k}{km} = \frac{6m - 5k}{km}$

e $\frac{13}{2y} - \frac{3}{2y} = \frac{10}{2y} = \frac{5}{y}$

f $6 - \frac{1}{p} = \frac{6}{1} - \frac{1}{p} = \frac{6p}{p} - \frac{1}{p} = \frac{6p - 1}{p}$

Bladzijde 27

23 a $\frac{p}{4p} + \frac{1}{p} = \frac{p}{4p} + \frac{4}{4p} = \frac{p + 4}{4p}$

b $\frac{18ac}{6c} + 2a = 3a + 2a = 5a$

c $\frac{11}{a} - \frac{5}{2b} = \frac{22b}{2ab} - \frac{5a}{2ab} = \frac{22b - 5a}{2ab}$

d $\frac{3}{p} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4p} + \frac{p}{4p} = \frac{12 + p}{4p}$

e $\frac{3x}{x} + 8 = 3 + 8 = 11$

f $\frac{24q}{8q} - \frac{28q}{7q} = 3 - 4 = -1$

24 a $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

b $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$

c $-5 \cdot \frac{2}{7} = -\frac{5}{1} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{10}{7} = -1\frac{3}{7}$

d $\frac{2}{5} : 4 = \frac{2}{5} : \frac{4}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

e $-\frac{1}{3} : \frac{5}{6} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

f $\frac{1}{8} : 12 = \frac{1}{8} : \frac{12}{1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{96}$

Bladzijde 28

25 a $\frac{x}{12} \cdot \frac{9}{y} = \frac{9x}{12y} = \frac{3x}{4y}$

b $\frac{a}{4} : \frac{3}{c} = \frac{a}{4} \cdot \frac{c}{3} = \frac{ac}{12}$

c $\frac{p}{9} \cdot r = \frac{p}{9} \cdot \frac{r}{1} = \frac{pr}{9}$

d $\frac{a}{5} : \frac{8b}{c} = \frac{a}{5} \cdot \frac{c}{8b} = \frac{ac}{40b}$



$$\mathbf{a} \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3y}{xy} + \frac{2x}{xy} = \frac{3y+2x}{xy}$$

$$\mathbf{b} \quad \frac{2p}{pq} + \frac{7}{q} = \frac{2}{q} + \frac{7}{q} = \frac{9}{q}$$

$$\mathbf{c} \quad \frac{3}{p} \cdot \frac{6}{q} = \frac{18}{pq}$$

$$\mathbf{d} \quad \frac{6}{r} : \frac{p}{9} = \frac{6}{r} \cdot \frac{9}{p} = \frac{54}{pr}$$

$$\mathbf{e} \quad \frac{4}{ab} - \frac{8}{ab} = -\frac{4}{ab}$$

$$\mathbf{f} \quad \frac{1}{6} : a = \frac{1}{6} : \frac{a}{1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{6a}$$

$$\mathbf{g} \quad \frac{5a}{10a} + \frac{4a}{2a} = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{h} \quad 5 - \frac{3}{a} = \frac{5}{1} - \frac{3}{a} = \frac{5a}{a} - \frac{3}{a} = \frac{5a-3}{a}$$

$$\mathbf{i} \quad \frac{9xy}{3y} - x = 3x - x = 2x$$

$$\mathbf{j} \quad \frac{10}{b} - \frac{4}{9a} = \frac{90a}{9ab} - \frac{4b}{9ab} = \frac{90a-4b}{9ab}$$

2.4 Machten

Bladzijde 29

$$\mathbf{a} \quad 2b^3 \cdot 2b^2 = 4b^5$$

$$\mathbf{b} \quad 3k^2 \cdot -9k^5 = -27k^7$$

$$\mathbf{c} \quad 5x^{10} \cdot -y^{10} = -5x^{10}y^{10}$$

$$\mathbf{d} \quad -3y \cdot -y^{13} = 3y^{14}$$

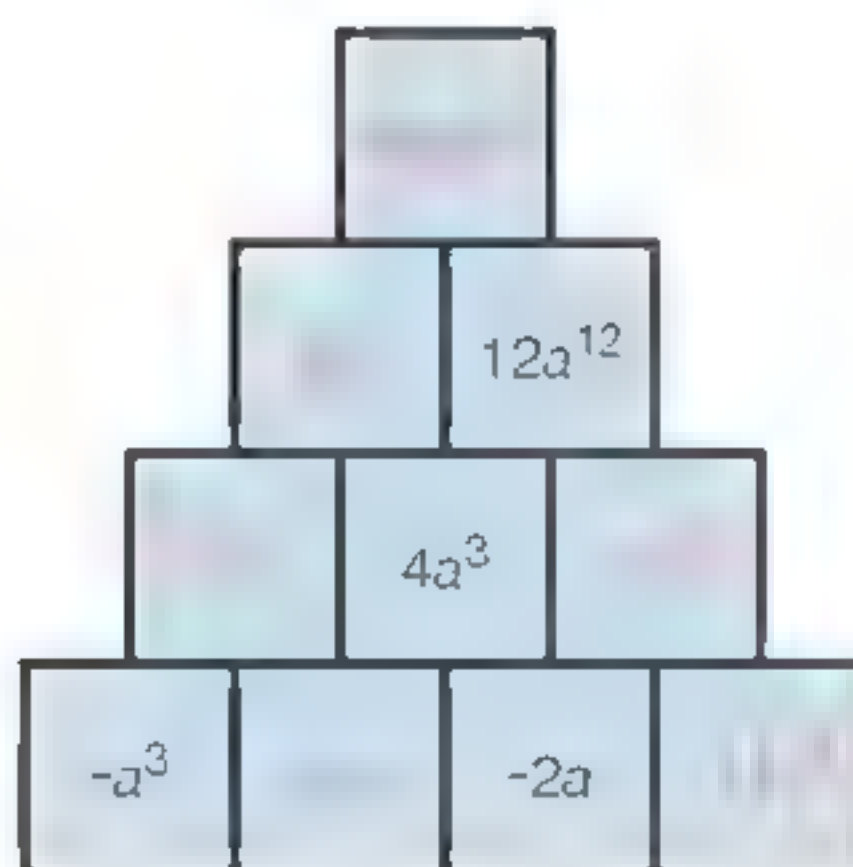
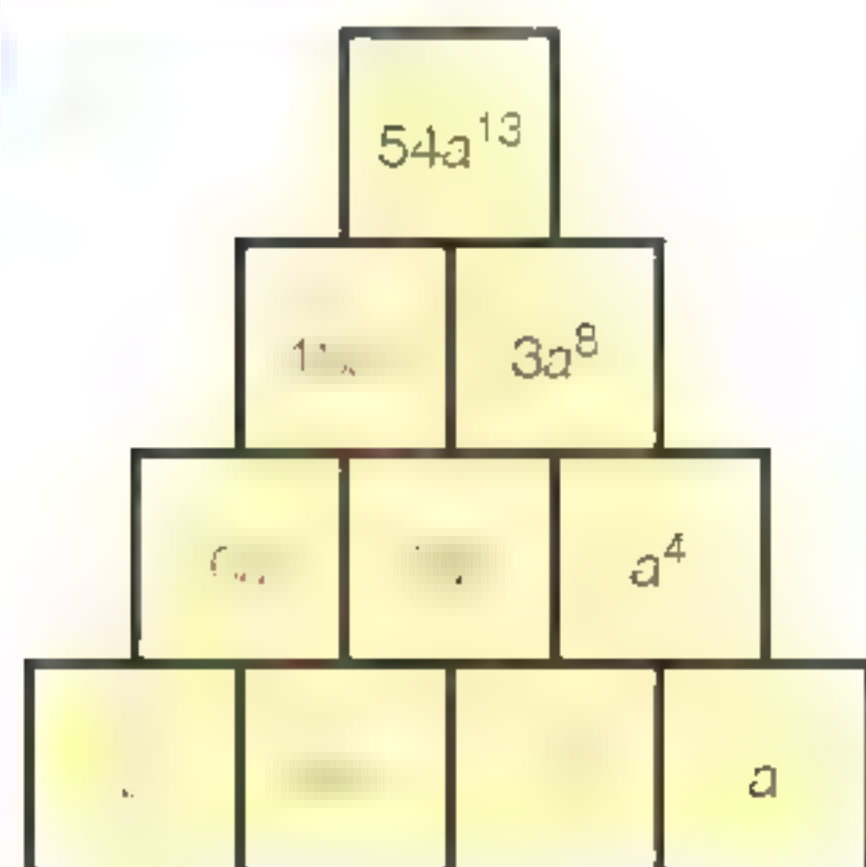
$$\mathbf{e} \quad 11a^4 \cdot -2b^5 = -22a^4b^5$$

$$\mathbf{f} \quad 4x^3 \cdot 2x^7 \cdot -2x^2 = -16x^{12}$$

$$\mathbf{g} \quad -3a^3 \cdot -a^6 \cdot 2a = 6a^{10}$$

$$\mathbf{h} \quad -x \cdot -12x^4 \cdot x^2 = 12x^7$$

Bladzijde 30



$$\mathbf{a} \quad 5x^2 + 9x^2 = 14x^2$$

$$\mathbf{b} \quad -5a^4 + 5a^4 = 0$$

$$\mathbf{c} \quad 3x^3y - x^3y^2 \text{ kan niet}$$

$$\mathbf{d} \quad xy^3 + 3xy^3 = 4xy^3$$

$$\mathbf{e} \quad -a^4b^2 - a^4b^2 = -2a^4b^2$$

$$\mathbf{f} \quad -4y^2 + 3y^2 = -y^2$$

Bladzijde 31

$$\mathbf{a} \quad 13x^4y^3 + x^4y^3 = 14x^4y^3$$

$$\mathbf{b} \quad -b^5 + b^5 = 0$$

$$\mathbf{c} \quad 6ab^2 + 5a^4b \text{ kan niet}$$

$$\mathbf{d} \quad 3b^5 \cdot 4b^7 = 12b^{12}$$

$$\mathbf{e} \quad 4x^3y^2 \cdot -6x^4y^9 = -24x^7y^{11}$$

$$\mathbf{f} \quad 6a^6b - 8a^6b = -2a^6b$$

- 31**
- a $(x^3)^5 = x^{15}$
 - b $(b^7)^2 = b^{14}$
 - c $6x^2 \cdot (x^2)^4 = 6x^2 \cdot x^8 = 6x^{10}$
 - d $(a^2)^4 + (a^4)^2 = a^8 + a^8 = 2a^8$
 - e $3a^{10} - 4(a^5)^2 = 3a^{10} - 4a^{10} = -a^{10}$
 - f $11(y^6)^5 - 11(y^{15})^2 = 11y^{30} - 11y^{30} = 0$

Bladzijde 32

- a $6x^4y^6 - x^4y^6 = 5x^4y^6$
- b $3a^{10} - 4(a^5)^2 = 3a^{10} - 4a^{10} = -a^{10}$
- c $x^5 \cdot -2x^9 = -2x^{14}$
- d $a^2b^3 + 2a^3b^2$ kan niet
- e $-a^3b^5 \cdot -a^6 = a^9b^5$
- f $4x^4y^8 - 9x^4y^8 = -5x^4y^8$
- g $-3a^3 \cdot 4ab^5 = -12a^4b^5$
- h $2x^4 - 4(x^2)^2 = 2x^4 - 4x^4 = -2x^4$
- a $(xy)^6 = x^6y^6$
- b $(7x)^2 = 49x^2$
- c $(-a)^7 = -a^7$
- d $-(3b)^2 = -9b^2$
- e $-4(x^2y)^3 = -4x^6y^3$
- f $(xyz)^5 = x^5y^5z^5$

Bladzijde 33

- a $(-2x^2)^3 = -8x^6$
- b $(xyz^2)^5 = x^5y^5z^{10}$
- c $(-2a^2b^2c)^4 = 16a^8b^8c^4$
- d $(5x^3)^2 + 5(x^2)^3 = 25x^6 + 5x^6 = 30x^6$
- e $4(ab)^4 \cdot a^3b^5 = 4a^4b^4 \cdot a^3b^5 = 4a^7b^9$
- f $(-2q^4)^3 - (q^6)^2 = -8q^{12} - q^{12} = -9q^{12}$

Bladzijde 34

- a $\frac{a^8}{a^3} = a^5$
- b $\frac{y^9}{y} = y^8$
- c $\frac{11b^5}{11b^5} = 1$
- d $\frac{12x^{10}}{4x^5} = 3x^5$
- a $\frac{a^{13}}{a^{10}} = a^3$
- b $a^{10} + a^{13}$ kan niet
- c $(10a)^3 = 1000a^3$
- d $10a + 13a = 23a$
- e $a^{10} \cdot a^{13} = a^{23}$
- f $\frac{10a}{13a} = \frac{10}{13}$
- g $a^{13} - a^{10}$ kan niet
- h $\frac{16a^8}{4a^6} = 4a^2$
- i $a^9 \cdot (a^5)^2 = a^9 \cdot a^{10} = a^{19}$
- j $a^9 + 4(a^3)^2 = a^9 + 4a^6$
- k $5a^6 - 3(a^3)^2 = 5a^6 - 3a^6 = 2a^6$
- l $11a^7 - 7a^7 = 4a^7$
- m $3p^7 \cdot -8p^4 = -24p^{11}$
- n $\frac{p^{12}}{(p^2)^6} = \frac{p^{12}}{p^{12}} = 1$
- o $-8y^3 \cdot 5y^2 = -40y^5$
- p $12a^6 - 4a^2 \cdot 2a^4 = 12a^6 - 8a^6 = 4a^6$

3 Lineaire vergelijkingen en formules

3.1 Lineaire vergelijkingen

Bladzijde 36



a $5x - 7 = 12x - 7$
 $5x - 12x = -7 + 7$
 $-7x = 0$
 $x = 0$

b $3a - 2 = a + 4$
 $3a - a = 4 + 2$
 $2a = 6$
 $a = 3$

c $-5b - 10 = -6b + 3$
 $-5b + 6b = 3 + 10$
 $b = 13$

d $x - 5 = 4x + 1$
 $x - 4x = 1 + 5$
 $-3x = 6$
 $x = -2$



a $5(x - 3) = 2x + 9$
 $5x - 15 = 2x + 9$
 $5x - 2x = 9 + 15$
 $3x = 24$
 $x = 8$

b $5a + 7 = 3(a + 8)$
 $5a + 7 = 3a + 24$
 $5a - 3a = 24 - 7$
 $2a = 17$
 $a = 8\frac{1}{2}$

c $3(x - 1) = -x + 12$
 $3x - 3 = -x + 12$
 $3x + x = 12 + 3$
 $4x = 15$
 $x = 3\frac{3}{4}$

d $2y - 8 = 3 + 3(y - 7)$
 $2y - 8 = 3 + 3y - 21$
 $2y - 3y = 3 - 21 + 8$
 $-y = -10$
 $y = 10$

e $4(x - 4) = 5(x - 5)$
 $4x - 16 = 5x - 25$
 $4x - 5x = -25 + 16$
 $-x = -9$
 $x = 9$

f $3(y + 5) = -2(y + 10)$
 $3y + 15 = -2y - 20$
 $3y + 2y = -20 - 15$
 $5y = -35$
 $y = -7$



a $9x = x - 16$
 $9x - x = -16$
 $8x = -16$
 $x = -2$

b $4(3x - 2) + 12 = 28$
 $12x - 8 + 12 = 28$
 $12x = 28 + 8 - 12$
 $12x = 24$
 $x = 2$

$$\begin{aligned} \text{c } 2(p-2) &= 3(p+5) \\ 2p-4 &= 3p+15 \\ 2p-3p &= 15+4 \\ -p &= 19 \\ p &= -19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d } -y-1 &= -2y \\ -y+2y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e } 5(3y-7) + 7 &= 7(2y-4) \\ 15y-35+7 &= 14y-28 \\ 15y-14y &= -28+35-7 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

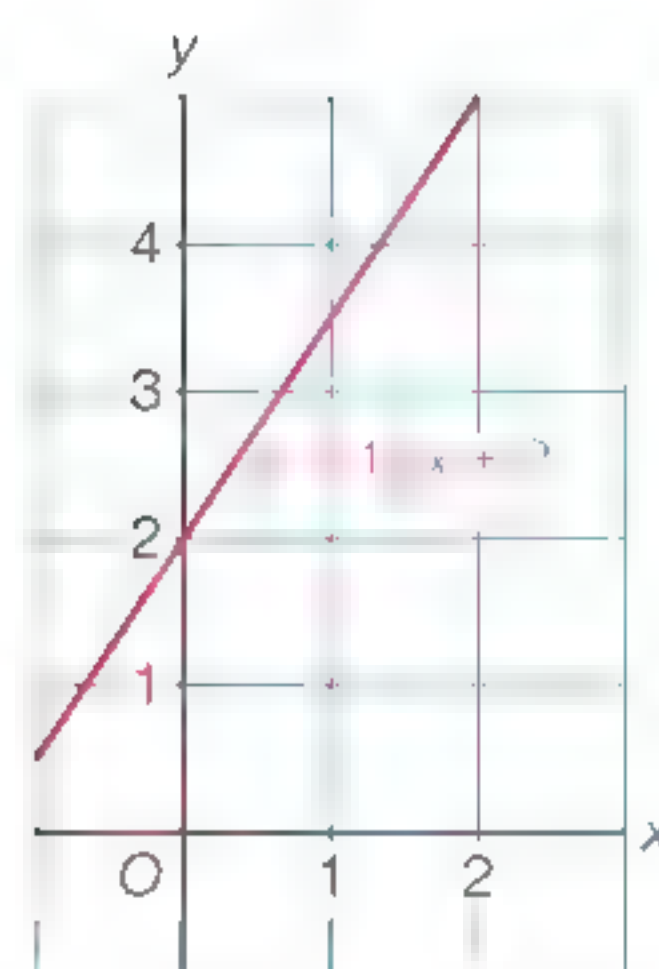
$$\begin{aligned} \text{f } 5a-10 &= 3a-2 \\ 5a-3a &= -2+10 \\ 2a &= 8 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

3.2 Lineaire formules

Bladzijde 37

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 2 & 5 \end{array}$$

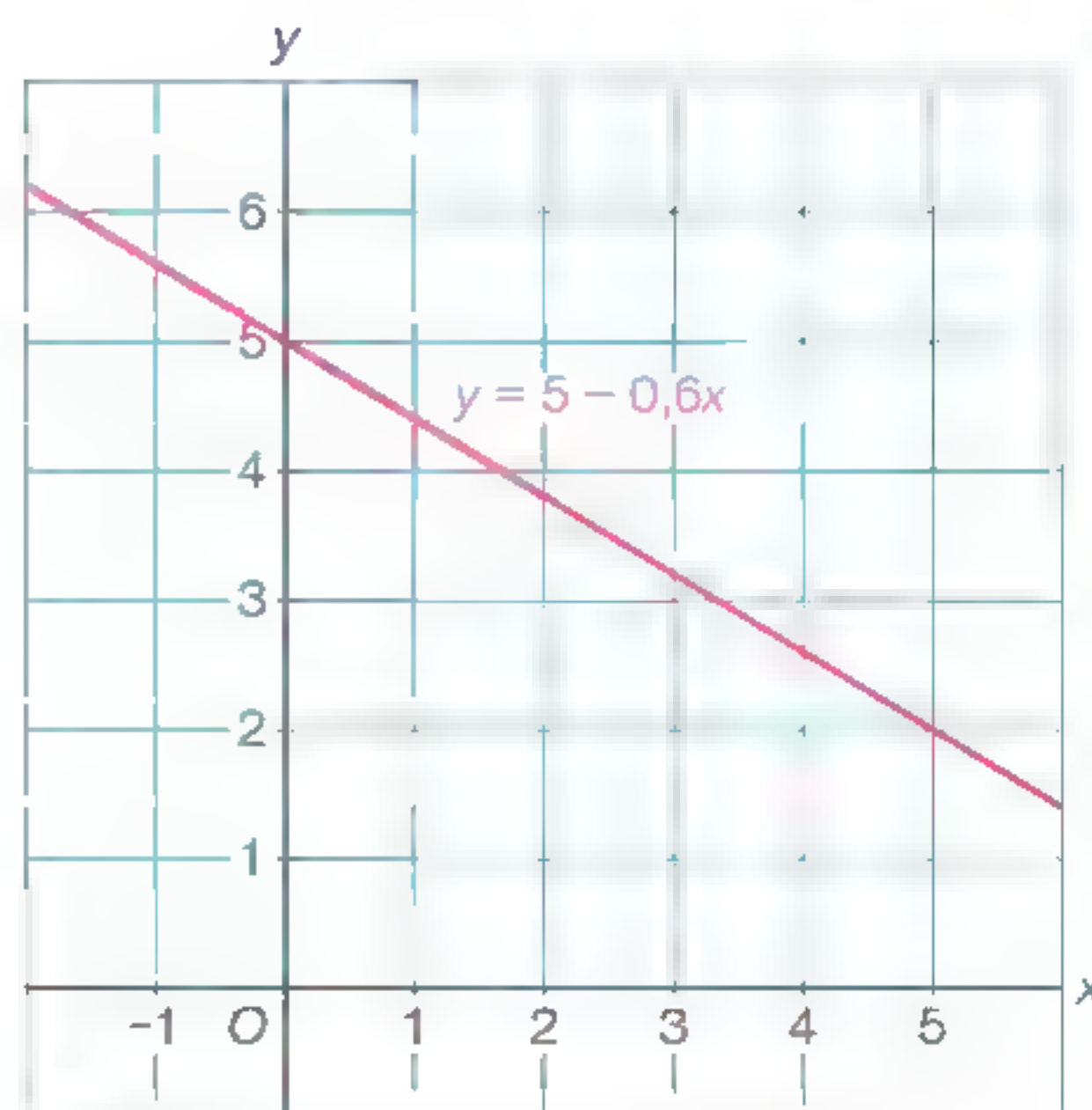
- b** $x = 5$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot 5 + 2 = 9\frac{1}{2}$
Dus A ligt op de grafiek.
 $x = -5$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot -5 + 2 = -5\frac{1}{2}$
Dus B ligt niet op de grafiek.
 $x = 14$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot 14 + 2 = 23$
Dus C ligt op de grafiek.

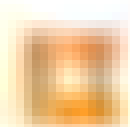


Bladzijde 38

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5 \\ \hline y & 5 & 2 \end{array}$$

- b** $x = 7$ geeft $y = 5 - 0,6 \cdot 7 = 0,8$
Dus P ligt niet op de grafiek.
 $x = -5$ geeft $y = 5 - 0,6 \cdot -5 = 8$
Dus Q ligt op de grafiek.
 $x = 20$ geeft $y = 5 - 0,6 \cdot 20 = -7$
Dus R ligt niet op de grafiek.





a $y = 1\frac{1}{2}x$

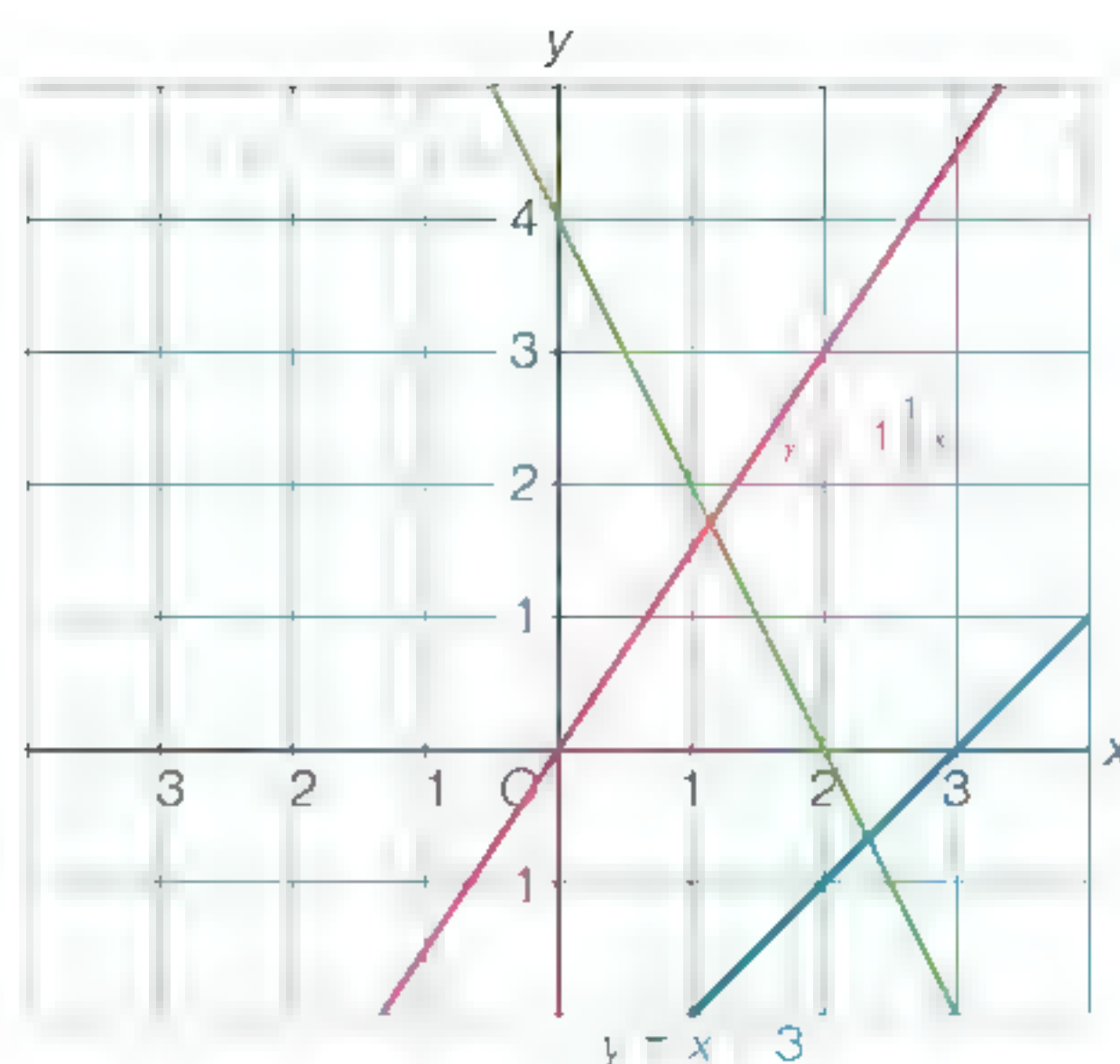
x	0	2
y	0	3

$y = x - 3$

x	1	3
y	-2	0

$y = -2x + 4$

x	0	2
y	4	0



b $x = -8$ invullen in $y = 1\frac{1}{2}x$ geeft $y = 1\frac{1}{2} \cdot -8 = -12$.

Dus P ligt op de grafiek van $y = 1\frac{1}{2}x$.

$x = -8$ invullen in $y = x - 3$ geeft $y = -8 - 3 = -11$.

Dus P ligt niet op de grafiek van $y = x - 3$.

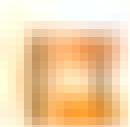
In de figuur zie je dat P niet op de grafiek van $y = -2x + 4$ ligt.

Bladzijde 39



a Van $y = 2x + 3$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 3$ snijden de grafieken de y -as in hetzelfde punt. Dat zie je aan het getal 3.

b Van $y = 1\frac{1}{2}x + 4$ en $y = 1\frac{1}{2}x + 3$ zijn de grafieken evenwijdig. Ze hebben dezelfde richtingscoëfficiënt, namelijk $1\frac{1}{2}$.



a De grafieken van I en III zijn evenwijdig en de grafieken van IV en V zijn evenwijdig.

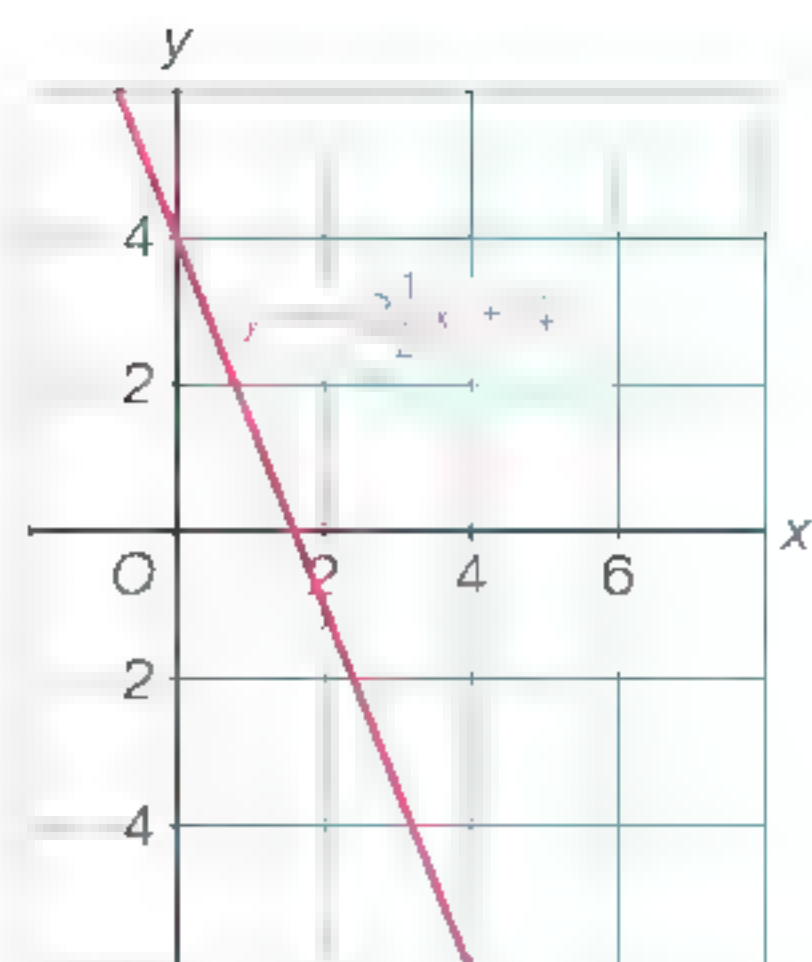
b De grafieken van I en VI hebben hetzelfde snijpunt met de y -as en de grafieken van II, III en V hebben hetzelfde snijpunt met de y -as.

a De grafiek snijdt de y -as in het punt $(0, 4)$.

b $rc = -2\frac{1}{2}$

c

x	0	2
y	4	-1



a De grafieken van I en III zijn evenwijdig en de grafieken van II en IV zijn evenwijdig.

b De grafieken van I en IV hebben hetzelfde snijpunt met de y -as en de grafieken van III, V en VI hebben hetzelfde snijpunt met de y -as.

c $y = 3x - 6$

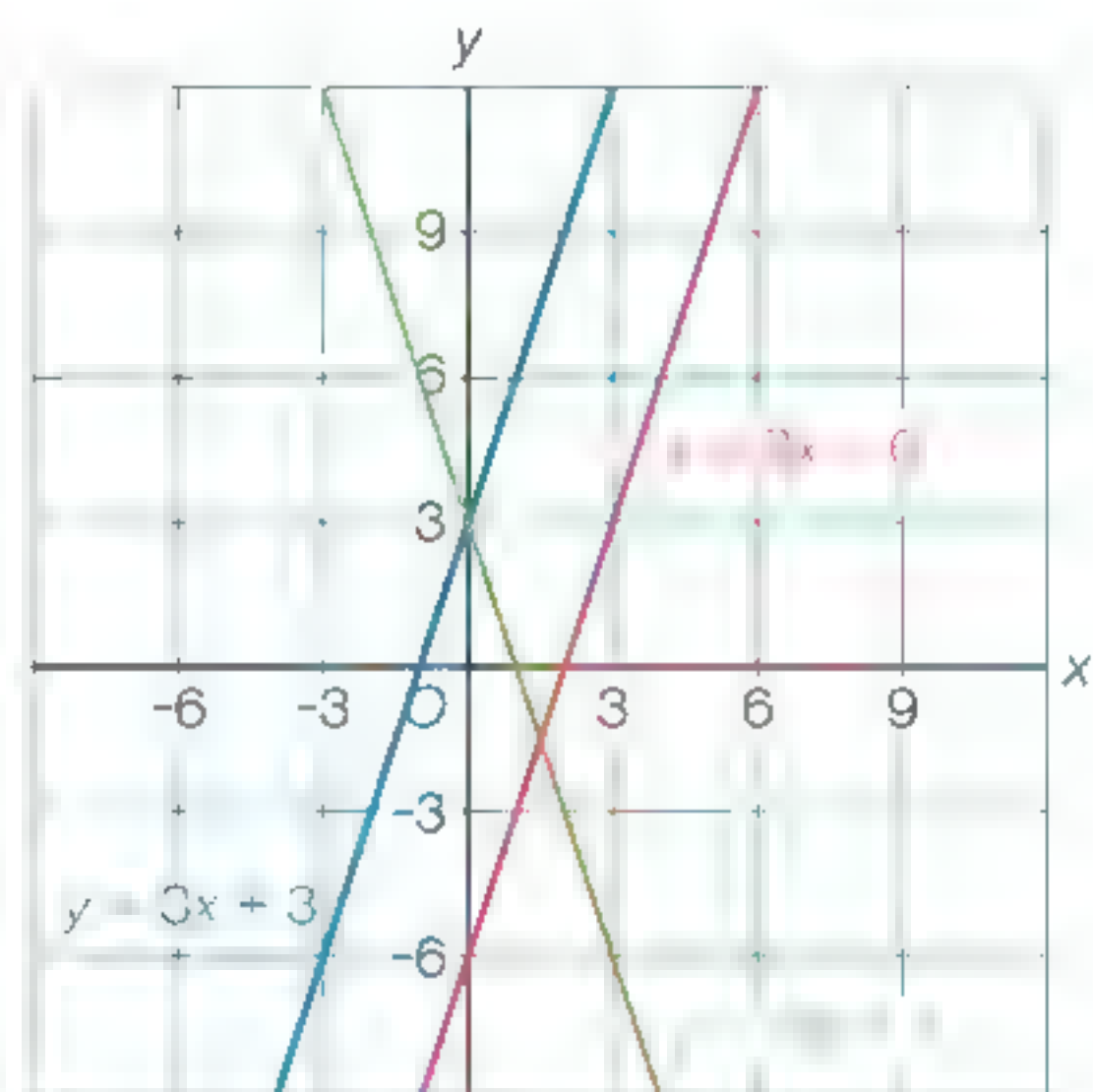
x	0	3
y	-6	3

$y = 3x + 3$

x	0	3
y	3	12

$y = -3x + 3$

x	0	3
y	3	-6



3.3 Formules opstellen en vergelijken

Bladzijde 41

a $p: y = ax + b$

Door $(0, 2)$ en $(2, 3)$, dus $a = \frac{1}{2}$.

$$b = 2$$

$$\text{Dus } p: y = \frac{1}{2}x + 2.$$

b $q: y = ax + b$

Door $(1, 3)$ en $(3, 0)$, dus $a = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

$$b = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } q: y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}.$$

l: $A = at + b$

Door $(0, 1)$ en $(2, 2)$, dus $a = \frac{1}{2}$.

$$b = 1$$

$$\text{Dus } l: A = \frac{1}{2}t + 1.$$

a $h: B = aq + b$

Door $(0, 16)$ en $(6, 0)$, dus $a = \frac{-16}{6} = -2\frac{2}{3}$.

$$b = 16$$

$$\text{Dus } h: B = -2\frac{2}{3}q + 16.$$

b $g: R = ap + b$

Door $(0, 0)$ en $(6, 180)$, dus $a = \frac{180}{6} = 30$.

$$b = 0$$

$$\text{Dus } g: R = 30p.$$

Bladzijde 42

$$4x + 3 = 3x - 1$$

$$4x - 3x = -1 - 3$$

$$x = -4$$

$x = -4$ invullen in $y = 4x + 3$ geeft $y = 4 \cdot -4 + 3 = -13$.

Dus $S(-4, -13)$.

$$-3x + 3 = x - 9$$

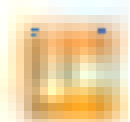
$$-3x - x = -9 - 3$$

$$-4x = -12$$

$$x = 3$$

$x = 3$ invullen in $y = x - 9$ geeft $y = 3 - 9 = -6$.

Dus $T(3, -6)$.



$$5x - 1 = x - 17$$

$$5x - x = -17 + 1$$

$$4x = -16$$

$$x = -4$$

$x = -4$ invullen in $y = 5x - 1$ geeft $y = 5 \cdot -4 - 1 = -21$.

Dus $S(-4, -21)$.



$$-4x + 8 = -x - 7$$

$$-4x + x = -7 - 8$$

$$-3x = -15$$

$$x = 5$$

$x = 5$ invullen in $y = -x - 7$ geeft $y = -5 - 7 = -12$.

Dus $T(5, -12)$.



$$x = -\frac{1}{2}x - 6$$

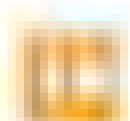
$$x + \frac{1}{2}x = -6$$

$$1\frac{1}{2}x = -6$$

$$x = -4$$

$x = -4$ invullen in $y = x$ geeft $y = -4$.

Dus $P(-4, -4)$.



$$k: y = ax + b$$

Door $(0, 2)$ en $(1, 3)$, dus $a = 1$.

$$b = 2$$

Dus $k: y = x + 2$.

$$n: y = ax + b$$

Door $(0, 5)$ en $(1, 4)$, dus $a = -1$.

$$b = 5$$

Dus $n: y = -x + 5$.

$$x + 2 = -x + 5$$

$$x + x = 5 - 2$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$x = 1\frac{1}{2}$ invullen in $y = x + 2$ geeft $y = 1\frac{1}{2} + 2 = 3\frac{1}{2}$.

Dus $S(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

4 [HAVO-B/MB0] Lineaire functies

Bladzijde 43

a $5 \times 6,50 + 12,50 = €45$

b $8 \times 6,50 + 12,50 = €64,50$

a $8 \times 7,50 + 13,50 = €73,50$

b $12 \times 7,50 + 13,50 = €103,50$

Bladzijde 44

a $f(2) = -5 \cdot 2 - 10 = -20$

$f(-4) = -5 \cdot -4 - 10 = 10$

$f(10) = -5 \cdot 10 - 10 = -60$

b $g(-6) = -2 \cdot -6 + 12 = 24$

$g(-1) = -2 \cdot -1 + 12 = 14$

$g(100) = -2 \cdot 100 + 12 = -188$

c $f(4) + g(4) = -5 \cdot 4 - 10 + -2 \cdot 4 + 12 = -20 - 10 - 8 + 12 = -26$

d $h(x) = -5x - 10 + -2x + 12 = -7x + 2$

a $f(2) = -10 \cdot 2 = -20$

$f(-5) = -10 \cdot -5 = 50$

$f(12) = -10 \cdot 12 = -120$

b $g(6) = 10 - 3 \cdot 6 = -8$

$g(-4) = 10 - 3 \cdot -4 = 22$

$g(15) = 10 - 3 \cdot 15 = -35$

c $g(-15) = 10 - 3 \cdot -15 = 55$

d $h(x) = -10x + 10 - 3x = -13x + 10$

Bladzijde 45

a $g(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

$g(6) = 3 \cdot 6 + 2 = 20$

b

x	0	2
$g(x)$	2	8

Zie de grafiek hiernaast.

c $g(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

Dus Q ligt op de grafiek van g .

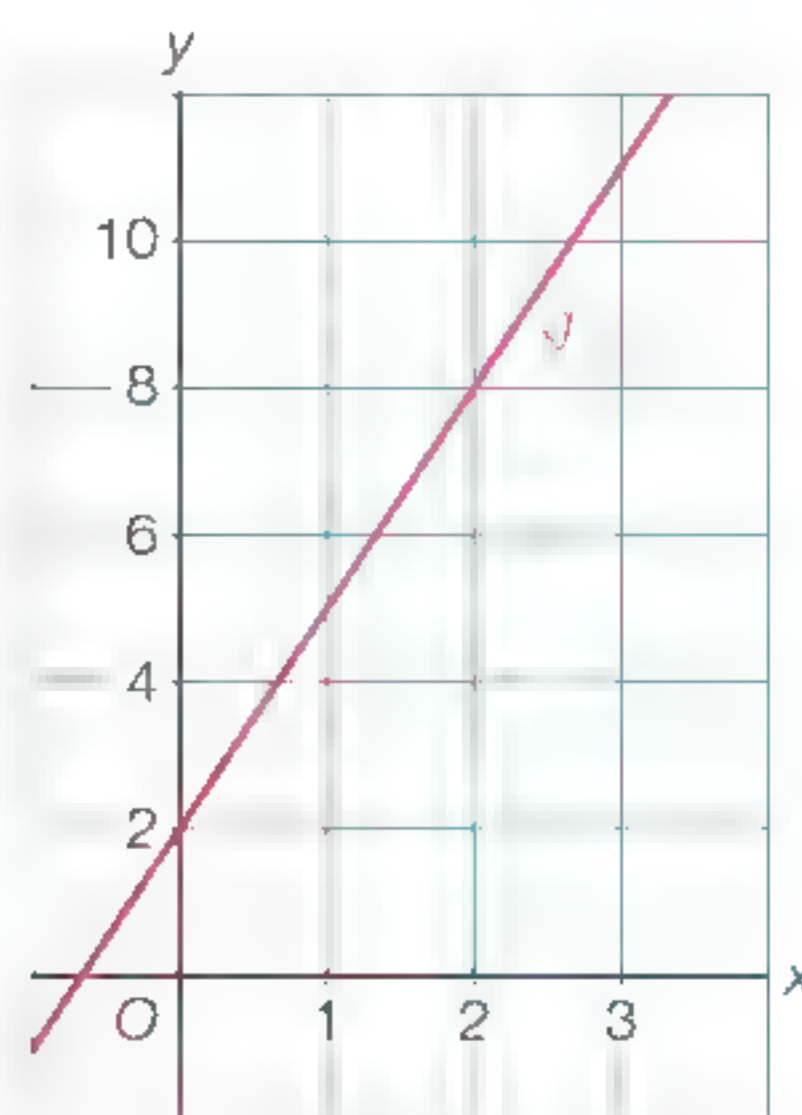
d $3x + 2 = 29$

$3x = 29 - 2$

$3x = 27$

$x = 9$

Dus $x_R = 9$.



Bladzijde 46

a $h(x) = 2x + 3$

x	0	1
$h(x)$	3	5

$$k(x) = -4x + 2$$

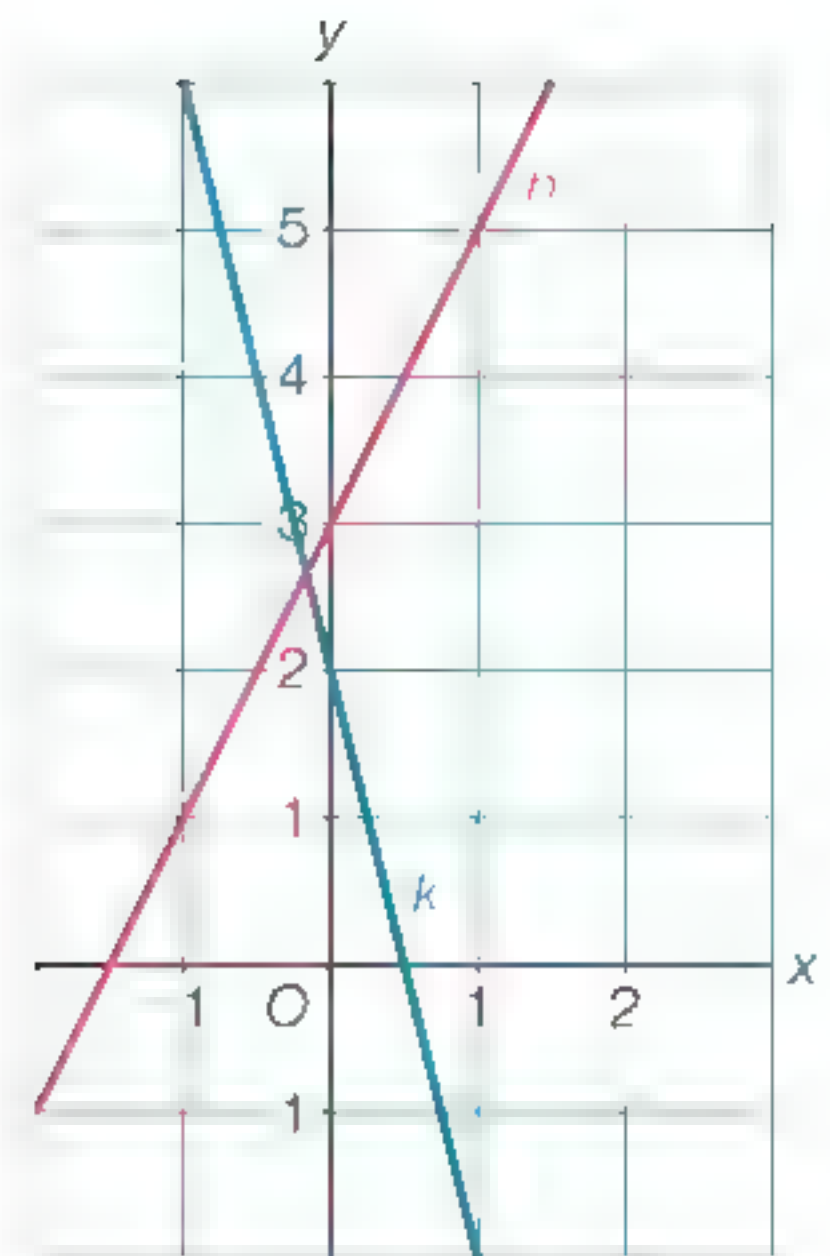
x	0	1
$k(x)$	2	-2

Zie de grafieken hiernaast.

b $h(-1\frac{1}{2}) = 2 \cdot -1\frac{1}{2} + 3 = 0$

c $k(\frac{1}{2}) = -4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$

d $g(x) = 2x + 3 + -4x + 2 = -2x + 5$

**Bladzijde 47**

a $f(x) = 0$ geeft $-2x + 8 = 0$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

Dus $P(4, 0)$.

$f(0) = 8$, dus $Q(0, 8)$.

b $g(x) = 0$ geeft $-4x - 4 = 0$

$$-4x = 4$$

$$x = -1$$

Dus $S(-1, 0)$.

$g(0) = -4$, dus $T(0, -4)$.



a $f(x) = 0$ geeft $0,4x + 4 = 0$

$$0,4x = -4$$

$$x = -10$$

Dus $K(-10, 0)$.

$f(0) = 4$, dus $M(0, 4)$.

$g(x) = 0$ geeft $-1,6x + 5 = 0$

$$-1,6x = -5$$

$$x = 3,125$$

Dus $L(3,125; 0)$

$g(0) = 5$, dus $N(0, 5)$.

b $0,4x + 4 = -1,6x + 5$

$$0,4x + 1,6x = 5 - 4$$

$$2x = 1$$

$$x = 0,5$$

$$f(0,5) = 0,4 \cdot 0,5 + 4 = 0,2 + 4 = 4,2$$

Dus $S(0,5; 4,2)$

c $h(x) = 0,4x + 4 + -1,6x + 5 = -1,2x + 9$

5 [HAVO-B] Lineaire vormen

5.1 Formules opstellen

Bladzijde 48

$$\begin{array}{l} \text{1} \\ l: y = 3x + b \\ A(-3, 5) \text{ op } l \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot -3 + b = 5 \\ -9 + b = 5 \\ b = 14 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = 3x + 14$.

$$\begin{array}{l} \text{2} \\ m: y = -\frac{1}{2}x + b \\ B(-4, 8) \text{ op } m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -4 + b = 8 \\ 2 + b = 8 \\ b = 6 \end{array} \right.$$

Dus $m: y = -\frac{1}{2}x + 6$.

$$\begin{array}{l} \text{3} \\ p: y = -5x + b \\ Q(1, 3) \text{ op } p \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -5 \cdot 1 + b = 3 \\ -5 + b = 3 \\ b = 8 \end{array} \right.$$

Dus $p: y = -5x + 8$.

Bladzijde 49

$$\begin{array}{l} \text{4} \\ k: y = ax + b \text{ is evenwijdig met } l, \text{ dus } a = 4. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k: y = 4x + b \\ P(-3, 5) \text{ op } k \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot -3 + b = 5 \\ -12 + b = 5 \\ b = 17 \end{array} \right.$$

Dus $k: y = 4x + 17$.

$$\begin{array}{l} \text{5} \\ q: y = ax + b \text{ is evenwijdig met } r, \text{ dus } a = -1\frac{1}{2}. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} q: y = -1\frac{1}{2}x + b \\ S(6, -5) \text{ op } q \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot 6 + b = -5 \\ -9 + b = -5 \\ b = 4 \end{array} \right.$$

Dus $q: y = -1\frac{1}{2}x + 4$.

5 $l: y = ax + b$ is evenwijdig met m , dus $a = 5$.

$$\begin{array}{l} l: y = 5x + b \\ B(6, 13) \text{ op } l \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 6 + b = 13 \\ 30 + b = 13 \\ b = -17 \end{array} \right.$$

Dus $l: y = 5x - 17$.

7 $p: y = ax + b$ is evenwijdig met q , dus $a = -3$.

$$\begin{array}{l} p: y = -3x + b \\ Q(-4, 7) \text{ op } p \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -3 \cdot -4 + b = 7 \\ 12 + b = 7 \\ b = -5 \end{array} \right.$$

Dus $p: y = -3x - 5$.

Bladzijde 50

a $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}x + 2$
 $2x + 4 = x + 8$
 $2x - x = 8 - 4$
 $x = 4$

b $\frac{1}{5}a = \frac{1}{2}a - 6$
 $2a = 5a - 60$
 $2a - 5a = -60$
 $-3a = -60$
 $a = 20$

c $\frac{1}{5}y = -y + 6$
 $y = -5y + 30$
 $y + 5y = 30$
 $6y = 30$
 $y = 5$

d $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + 2$
 $3x + 2 = 2x + 8$
 $3x - 2x = 8 - 2$
 $x = 6$

e $\frac{2}{5}x + 2 = -\frac{3}{5}$
 $2x + 10 = -3$
 $2x = -3 - 10$
 $2x = -13$
 $x = -6\frac{1}{2}$

f $\frac{1}{4}x - 2 = \frac{1}{5}x + 5$
 $5x - 40 = 4x + 100$
 $5x - 4x = 100 + 40$
 $x = 140$

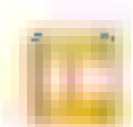
Bladzijde 51

a $5x - 10 < 4x + 6$
 $5x - 4x < 6 + 10$
 $x < 16$

b $4q > 3(7 + q)$
 $4q > 21 + 3q$
 $4q - 3q > 21$
 $q > 21$

c $4(x - 1) > 5 - 3(2 - x)$
 $4x - 4 > 5 - 6 + 3x$
 $4x - 3x > 5 - 6 + 4$
 $x > 3$

d $2(a + 5) < a - 100$
 $2a + 10 < a - 100$
 $2a - a < -100 - 10$
 $a < -110$



a $12(x - 6) > -3(x - 1)$
 $12x - 72 > -3x + 3$
 $12x + 3x > 3 + 72$
 $15x > 75$
 $x > 5$

b $\frac{1}{5}x - 2 > \frac{1}{6}x + 3$
 $6x - 60 > 5x + 90$
 $6x - 5x > 90 + 60$
 $x > 150$

c $6(3p + 16) < 2p$
 $18p + 96 < 2p$
 $18p - 2p < -96$
 $16p < -96$
 $p < -6$

Bladzijde 52



a $-3x < 18$
 $x > -6$

b $3x > -6$
 $x > -2$

c $-6x < 0$
 $x > 0$



a $7x + 8 > 11x + 20$
 $7x - 11x > 20 - 8$
 $-4x > 12$
 $x < -3$

c $-3x < 2x - 5$
 $-3x - 2x < -5$
 $-5x < -5$
 $x > 1$

b $3(x - 2) > 5(x - 2)$
 $3x - 6 > 5x - 10$
 $3x - 5x > -10 + 6$
 $-2x > -4$
 $x < 2$

d $x - 3 < x - (2 + 2x)$
 $x - 3 < x - 2 - 2x$
 $x - x + 2x < -2 + 3$
 $2x < 1$
 $x < \frac{1}{2}$



a $5x > 11x + 6$
 $5x - 11x > 6$
 $-6x > 6$
 $x < -1$

c $6 - 2(x - 3) < -(x - 8) + 1$
 $6 - 2x + 6 < -x + 8 + 1$
 $-2x + x < 8 + 1 - 6 - 6$
 $-x < -3$
 $x > 3$

b $\frac{1}{2}x < 2x + 9$
 $x < 4x + 18$
 $x - 4x < 18$
 $-3x < 18$
 $x > -6$

d $7x + 9 > 8(x - 2) + 6$
 $7x + 9 > 8x - 16 + 6$
 $7x - 8x > -16 + 6 - 9$
 $-x > -19$
 $x < 19$

6 [HAVO-B/MBO] Algebra deel 2

6.1 Wortels

Bladzijde 53



a $(\sqrt{15})^2 = 15$

b $-(\sqrt{21})^2 = -21$

c $(\sqrt{40})^2 = 40$

d $(3\sqrt{8})^2 = 9 \cdot 8 = 72$



a $(-3\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$

b $-5\sqrt{25} - 4(\sqrt{3})^2 = -5 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -25 - 12 = -37$

c $-7(\sqrt{2})^2 = -7 \cdot 2 = -14$

d $(\sqrt{12})^2 - 2^2 = 12 - 4 = 8$

Bladzijde 54



a $3\sqrt{13} + \sqrt{13} = 4\sqrt{13}$

b $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = \sqrt{2}$

c $7\sqrt{15} + 4\sqrt{15} = 11\sqrt{15}$

d $2\sqrt{2} - 11\sqrt{3}$ kan niet

e $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

f $\sqrt{23} + \sqrt{23} = 2\sqrt{23}$

g $3\sqrt{11} + 3\sqrt{11} = 6\sqrt{11}$

h $2\sqrt{6} - 5$ kan niet



a $5\sqrt{8} + 12\sqrt{8} = 17\sqrt{8}$

b $(-2\sqrt{12})^2 = 4 \cdot 12 = 48$

c $5\sqrt{15} - 4\sqrt{15} = \sqrt{15}$

d $9\sqrt{20} - 11\sqrt{20} = -2\sqrt{20}$

e $(\sqrt{17})^2 - 4^2 = 17 - 16 = 1$

f $5\sqrt{13} - 12\sqrt{3}$ kan niet

Bladzijde 55



a $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} = 14\sqrt{15}$

b $7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 14\sqrt{25} = 14 \cdot 5 = 70$

c $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$

d $8\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} = 24\sqrt{10}$

e $2\sqrt{11} \cdot 9\sqrt{11} = 18\sqrt{121} = 18 \cdot 11 = 198$

f $-12 \cdot 4\sqrt{13} = -48\sqrt{13}$

Bladzijde 56

a $6\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

b $12\sqrt{17} + 17$ kan niet

c $2(-5\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 25 \cdot 3 = 150$

d $6\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{5} = 42\sqrt{15}$

e $9\sqrt{13} - 3\sqrt{13} = 6\sqrt{13}$

f $-3\sqrt{36} + 2(\sqrt{7})^2 = -3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = -18 + 14 = -4$

Bladzijde 57

a $\sqrt{32} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

d $\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

b $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

e $\sqrt{63} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

c $\sqrt{150} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$

f $\sqrt{72} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$



a $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b $(3\sqrt{11})^2 = 9 \cdot 11 = 99$

c $8\sqrt{3} - 4\sqrt{7}$ kan niet

d $12\sqrt{17} - 5\sqrt{7}$ kan niet

e $7\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{7} = 35\sqrt{35}$

f $\sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

g $-3\sqrt{49} + 2(\sqrt{6})^2 = -3 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = -21 + 12 = -9$

h $5\sqrt{16} - 3\sqrt{9} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = 20 - 9 = 11$

i $9 + (2\sqrt{15})^2 - 4^2 = 9 + 4 \cdot 15 - 16 = 9 + 60 - 16 = 53$

j $5\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{24} = 10\sqrt{144} = 10 \cdot 12 = 120$

k $14\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

l $\sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

m $3(\sqrt{5})^2 - \sqrt{81} = 3 \cdot 5 - 9 = 15 - 9 = 6$

n $-4\sqrt{16} + (\sqrt{16})^2 = -4 \cdot 4 + 16 = -16 + 16 = 0$

6.2 Merkwaardige producten

Bladzijde 58



a $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

b $(a + 7)(a - 7) = a^2 - 49$

c $(b - 9)(b + 9) = b^2 - 81$

d $(3a + 2)(3a - 2) = 9a^2 - 4$

e $(5x - 6)(5x + 6) = 25x^2 - 36$

f $(8y + 1)(8y - 1) = 64y^2 - 1$

Bladzijde 59



a $(p + 5)^2 = p^2 + 10p + 25$

b $(q - 4)^2 = q^2 - 8q + 16$

c $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

d $(b + 7)^2 = b^2 + 14b + 49$

e $(e - 3)^2 = e^2 - 6e + 9$

f $(y + 10)^2 = y^2 + 20y + 100$

g $(a + 9)^2 = a^2 + 18a + 81$

h $(b + 4)^2 = b^2 + 8b + 16$

i $(7x + 4y)^2 = 49x^2 + 56xy + 16y^2$

j $(f - 1)^2 = f^2 - 2f + 1$

k $(3c + 8)^2 = 9c^2 + 48c + 64$

l $(5g - 3)^2 = 25g^2 - 30g + 9$



a $(4x + 9)^2 = 16x^2 + 72x + 81$

b $(8x - 3)^2 = 64x^2 - 48x + 9$

c $(7a + 2b)^2 = 49a^2 + 28ab + 4b^2$

d $(5a + 1)(5a - 1) = 25a^2 - 1$

e $(3 - 5a)^2 = 9 - 30a + 25a^2$

f $(x + 4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$

g $(8x - y)(8x + y) = 64x^2 - y^2$

h $(p - 5q)(p + 5q) = p^2 - 25q^2$

6.3 Ontbinden in factoren

Bladzijde 61



a $2x + 8y = 2(x + 4y)$

b $4a - ab = a(4 - b)$

c $x^2 + 20x = x(x + 20)$

d $4p - 6 = 2(2p - 3)$

e $pq + 3pr = p(q + 3r)$

f $x^2 - 9x = x(x - 9)$

g $xy - 3yz = y(x - 3z)$

h $3a - abc = a(3 - bc)$

i $12p - 8q = 4(3p - 2q)$

j $18x^2 + 9yz = 9(2x^2 + yz)$



a $2ab - 6bc = 2b(a - 3c)$

b $12p + 8q = 4(3p + 2q)$

c $9x^2 + 3x = 3x(3x + 1)$

d $18xy - 12y = 6y(3x - 2)$

e $6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

f $c^2 + c = c(c + 1)$

g $a^2b - 2b = b(a^2 - 2)$

h $2x^2 - 2x = 2x(x - 1)$

Bladzijde 63



a Zie de tabel hiernaast.

b $x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$

$x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$

$x^2 + 19x + 18 = (x + 1)(x + 18)$

$x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$

product 18		som
1	18	19
-1	-18	-19
2	9	11
-2	-9	-11
3	6	9
-3	-6	-9



a Zie de tabel hiernaast.

b $x^2 + 10x + 16 = (x + 2)(x + 8)$

$x^2 + 17x + 16 = (x + 1)(x + 16)$

$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4)$

product 16		som
1	16	17
-1	-16	-17
2	8	10
-2	-8	-10
4	4	8
-4	-4	-8



a $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$

b $x^2 - 10x + 9 = (x - 1)(x - 9)$



a $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$

b $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6)$



a $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(x - 3)$

b $25a^2 - 30a = 5a(5a - 6)$

c $x^2 + 10x + 24 = (x + 4)(x + 6)$

d $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

e $10pq + 5p = 5p(2q + 1)$

f $x^2 - 13x + 12 = (x - 12)(x - 1)$

7 [HAVO-B] Kwadratische vergelijkingen

7.1 Kwadratische vergelijkingen oplossen

Bladzijde 64

a $8x(4x - 8) = 0$

$$8x = 0 \vee 4x - 8 = 0$$

$$x = 0 \vee 4x = 8$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

b $(3x + 12)(x - 6) = 0$

$$3x + 12 = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$3x = -12 \vee x = 6$$

$$x = -4 \vee x = 6$$

c $5x(x + 7) = 0$

$$5x = 0 \vee x + 7 = 0$$

$$x = 0 \vee x = -7$$

d $(x - 4)(3x - 15) = 0$

$$x - 4 = 0 \vee 3x - 15 = 0$$

$$x = 4 \vee 3x = 15$$

$$x = 4 \vee x = 5$$

Bladzijde 65

a $x^2 + 5x - 24 = 0$

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 8 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -8$$

b $x^2 - 8x = 33$

$$x^2 - 8x - 33 = 0$$

$$(x + 3)(x - 11) = 0$$

$$x + 3 = 0 \vee x - 11 = 0$$

$$x = -3 \vee x = 11$$

c $x^2 = 6x$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x - 6) = 0$$

$$x = 0 \vee x - 6 = 0$$

$$x = 0 \vee x = 6$$

d $4x^2 + 2x = 0$

$$2x(2x + 1) = 0$$

$$2x = 0 \vee 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \vee 2x = -1$$

$$x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

e $b^2 + 7b + 12 = 0$

$$(b + 3)(b + 4) = 0$$

$$b + 3 = 0 \vee b + 4 = 0$$

$$b = -3 \vee b = -4$$

f $x^2 - 15 = -2x$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x - 3)(x + 5) = 0$$

$$x - 3 = 0 \vee x + 5 = 0$$

$$x = 3 \vee x = -5$$

a $14x^2 = 21x$

$$14x^2 - 21x = 0$$

$$7x(2x - 3) = 0$$

$$7x = 0 \vee 2x - 3 = 0$$

$$x = 0 \vee 2x = 3$$

$$x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$$

b $(x + 8)(x - 5) = 0$

$$x + 8 = 0 \vee x - 5 = 0$$

$$x = -8 \vee x = 5$$

$$\begin{aligned}\text{c } x^2 + 11x + 10 &= 0 \\ (x+1)(x+10) &= 0 \\ x+1 &= 0 \vee x+10 = 0 \\ x &= -1 \vee x = -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d } x^2 + 12x &= -35 \\ x^2 + 12x + 35 &= 0 \\ (x+7)(x+5) &= 0 \\ x+7 &= 0 \vee x+5 = 0 \\ x &= -7 \vee x = -5\end{aligned}$$

Bladzijde 66

$$\begin{aligned}\text{a } x^2 &= 100 \\ x &= 10 \vee x = -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b } x^2 &= -20 \\ \text{geen oplossing}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c } -x^2 &= 144 \\ x^2 &= -144 \\ \text{geen oplossing}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{a } (x+3)(x-8) &= 0 \\ x+3 &= 0 \vee x-8 = 0 \\ x &= -3 \vee x = 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b } p(3p+9) &= 0 \\ p &= 0 \vee 3p+9 = 0 \\ p &= 0 \vee 3p = -9 \\ p &= 0 \vee p = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c } 5c^2 + 25c &= 0 \\ 5c(c+5) &= 0 \\ 5c &= 0 \vee c+5 = 0 \\ c &= 0 \vee c = -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e } x^2 &= 14x - 40 \\ x^2 - 14x + 40 &= 0 \\ (x-4)(x-10) &= 0 \\ x-4 &= 0 \vee x-10 = 0 \\ x &= 4 \vee x = 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f } a^2 - 50 &= 4 - 3a \\ a^2 + 3a - 54 &= 0 \\ (a-6)(a+9) &= 0 \\ a-6 &= 0 \vee a+9 = 0 \\ a &= 6 \vee a = -9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d } x^2 + 64 &= 0 \\ x^2 &= -64 \\ \text{geen oplossing}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e } 5x^2 - 45 &= 0 \\ 5x^2 &= 45 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \vee x = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f } 3x^2 + 2 &= 101 \\ 3x^2 &= 99 \\ x^2 &= 33 \\ x &= \sqrt{33} \vee x = -\sqrt{33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d } x^2 - 4x &= 21 \\ x^2 - 4x - 21 &= 0 \\ (x+3)(x-7) &= 0 \\ x+3 &= 0 \vee x-7 = 0 \\ x &= -3 \vee x = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{e } x^2 - 3x &= -2x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x &= 0 \vee x-1 = 0 \\ x &= 0 \vee x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{f } 3b^2 &= -15b \\ 3b^2 + 15b &= 0 \\ 3b(b+5) &= 0 \\ 3b &= 0 \vee b+5 = 0 \\ b &= 0 \vee b = -5\end{aligned}$$

g $(x-7)(3x+6)=0$
 $x-7=0 \vee 3x+6=0$
 $x=7 \vee 3x=-6$
 $x=7 \vee x=-2$

h $-3x^2-1=50$
 $-3x^2=51$
 $x^2=-17$
geen oplossing

a $x^2-10=0$
 $x^2=10$
 $x=\sqrt{10} \vee x=-\sqrt{10}$

b $q^2+15q=-50$
 $q^2+15q+50=0$
 $(q+5)(q+10)=0$
 $q+5=0 \vee q+10=0$
 $q=-5 \vee q=-10$

c $p(5p+10)=0$
 $p=0 \vee 5p+10=0$
 $p=0 \vee 5p=-10$
 $p=0 \vee p=-2$

d $x^2+5x=2x$
 $x^2+3x=0$
 $x(x+3)=0$
 $x=0 \vee x+3=0$
 $x=0 \vee x=-3$

e $x^2+12x=-27$
 $x^2+12x+27=0$
 $(x+3)(x+9)=0$
 $x+3=0 \vee x+9=0$
 $x=-3 \vee x=-9$

i $6b^2=96$
 $b^2=16$
 $b=4 \vee b=-4$

f $x^2+9x=-14+9x$
 $x^2=-14$
geen oplossing

g $x^2-x=20$
 $x^2-x-20=0$
 $(x+4)(x-5)=0$
 $x+4=0 \vee x-5=0$
 $x=-4 \vee x=5$

h $5x^2=10$
 $x^2=2$
 $x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$

i $9x^2=900$
 $x^2=100$
 $x=10 \vee x=-10$

7.2 De abc-formule

Bladzijde 68

a $3x^2-7x+2=0$
 $a=3, b=-7$ en $c=2$
 $D=(-7)^2-4 \cdot 3 \cdot 2=25$
 $x=\frac{7+\sqrt{25}}{6} \vee x=\frac{7-\sqrt{25}}{6}$
 $x=2 \vee x=\frac{1}{3}$

b $5x^2=4+x$
 $5x^2-x-4=0$
 $a=5, b=-1$ en $c=-4$
 $D=(-1)^2-4 \cdot 5 \cdot -4=81$
 $x=\frac{1+\sqrt{81}}{10} \vee x=\frac{1-\sqrt{81}}{10}$
 $x=1 \vee x=-\frac{4}{5}$

c $4x^2 + 9x = -2$

$$4x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$a = 4, b = 9 \text{ en } c = 2$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 49$$

$$x = \frac{-9 + \sqrt{49}}{8} \vee x = \frac{-9 - \sqrt{49}}{8}$$

$$x = -\frac{1}{4} \vee x = -2$$

d $4x^2 + 5x + 1 = 0$

$$a = 4, b = 5 \text{ en } c = 1$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{9}}{8} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{9}}{8}$$

$$x = -\frac{1}{4} \vee x = -1$$



a $x^2 + 10x + 13 = 0$

$$a = 1, b = 10 \text{ en } c = 13$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 48$$

$$x = \frac{-10 + \sqrt{48}}{2} \vee x = \frac{-10 - \sqrt{48}}{2}$$

b $x^2 = 5x + 8$

$$x^2 - 5x - 8 = 0$$

$$a = 1, b = -5 \text{ en } c = -8$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 57$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} \vee x = \frac{5 - \sqrt{57}}{2}$$

c $4x^2 = 5x + 2$

$$4x^2 - 5x - 2 = 0$$

$$a = 4, b = -5 \text{ en } c = -2$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 57$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{57}}{8} \vee x = \frac{5 - \sqrt{57}}{8}$$

e $2x^2 + 3x = 5$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$a = 2, b = 3 \text{ en } c = -5$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{4}$$

$$x = 1 \vee x = -2\frac{1}{2}$$

f $4x^2 - 8x + 3 = 0$

$$a = 4, b = -8 \text{ en } c = 3$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16$$

$$x = \frac{8 + \sqrt{16}}{8} \vee x = \frac{8 - \sqrt{16}}{8}$$

$$x = 1\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$$

d $8x^2 = x + 10$

$$8x^2 - x - 10 = 0$$

$$a = 8, b = -1 \text{ en } c = -10$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot -10 = 321$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{321}}{16} \vee x = \frac{1 - \sqrt{321}}{16}$$

e $x^2 = -3x + 1$

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$a = 1, b = 3 \text{ en } c = -1$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 13$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

a $4x^2 + 2x + 3 = 0$
 $a = 4, b = 2$ en $c = 3$
 $D = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

b $7x + 2 = x^2$
 $-x^2 + 7x + 2 = 0$
 $a = -1, b = 7$ en $c = 2$
 $D = 7^2 - 4 \cdot -1 \cdot 2 = 57$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{57}}{-2} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{57}}{-2}$

c $15x^2 = 8x + 5$
 $15x^2 - 8x - 5 = 0$
 $a = 15, b = -8$ en $c = -5$
 $D = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot -5 = 364$
 $x = \frac{8 + \sqrt{364}}{30} \vee x = \frac{8 - \sqrt{364}}{30}$

a $20x^2 + 25x + 1 = 0$
 $a = 20, b = 25$ en $c = 1$
 $D = 25^2 - 4 \cdot 20 \cdot 1 = 545$
 $x = \frac{-25 + \sqrt{545}}{40} \vee x = \frac{-25 - \sqrt{545}}{40}$

b $3x + 1 = 2x^2$
 $-2x^2 + 3x + 1 = 0$
 $a = -2, b = 3$ en $c = 1$
 $D = 3^2 - 4 \cdot -2 \cdot 1 = 17$
 $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{-4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{-4}$

c $2x^2 = x - 5$
 $2x^2 - x + 5 = 0$
 $a = 2, b = -1$ en $c = 5$
 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

d $-x^2 + 5x + 3 = 0$
 $a = -1, b = 5$ en $c = 3$
 $D = 5^2 - 4 \cdot -1 \cdot 3 = 37$
 $x = \frac{-5 + \sqrt{37}}{-2} \vee x = \frac{-5 - \sqrt{37}}{-2}$

e $14x - 5x^2 - 3 = 0$
 $-5x^2 + 14x - 3 = 0$
 $a = -5, b = 14$ en $c = -3$
 $D = 14^2 - 4 \cdot -5 \cdot -3 = 136$
 $x = \frac{-14 + \sqrt{136}}{-10} \vee x = \frac{-14 - \sqrt{136}}{-10}$

f $-2x^2 = 3x + 5$
 $-2x^2 - 3x - 5 = 0$
 $a = -2, b = -3$ en $c = -5$
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot -2 \cdot -5 = -31$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

d $-3x^2 + 7x + 2 = 0$
 $a = -3, b = 7$ en $c = 2$
 $D = 7^2 - 4 \cdot -3 \cdot 2 = 73$
 $x = \frac{-7 + \sqrt{73}}{-6} \vee x = \frac{-7 - \sqrt{73}}{-6}$

e $5x^2 - 12x - 10 = 0$
 $a = 5, b = -12$ en $c = -10$
 $D = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -10 = 344$
 $x = \frac{12 + \sqrt{344}}{10} \vee x = \frac{12 - \sqrt{344}}{10}$

f $x^2 + 5x + 9 = 0$
 $a = 1, b = 5$ en $c = 9$
 $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -11$
 $D < 0$, dus geen oplossing.

g $x^2 - 4 = 2x$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$a = 1, b = -2 \text{ en } c = -4$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 20$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} \vee x = \frac{2 - \sqrt{20}}{2}$$

h $6x^2 + x = 1$

$$6x^2 + x - 1 = 0$$

$$a = 6, b = 1 \text{ en } c = -1$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot -1 = 25$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{25}}{12} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{25}}{12}$$

$$x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{2}$$

8 [HAVO-B/MBO] Kwadratische functies

Bladzijde 71

a $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$

b $f(x) = -x^2 + 3x$

c $f(x) = 4x^2 + 2$

d $a = 5, b = -1$ en $c = 1$

e $a = -1, b = 8$ en $c = 0$

f $a = 3, b = 0$ en $c = -11$

a $y = x^2 - 8x$

b $f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$

$f(-4) = (-4)^2 - 8 \cdot -4 = 48$

c $f(-10) = (-10)^2 - 8 \cdot -10 = 180$

Het punt A ligt dus op de grafiek van f .

d $f(-5) = (-5)^2 - 8 \cdot -5 = 65$

Het punt B ligt dus niet op de grafiek van f .

a $h(-3) = (-3)^2 - -3 - 2 = 10$

$h(5) = 5^2 - 5 - 2 = 18$

c $y_A = 4^2 - 4 - 2 = 10$

b $y_B = (-5)^2 - -5 - 2 = 28$

Bladzijde 72

a $a = 2$ en $b = -8$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$.

$y_{\text{top}} = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 2 = -10$

Dus de top is $(2, -10)$.

b $a = -\frac{1}{2}$ en $b = -1$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-1}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = -1$.

$y_{\text{top}} = g(-1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - -1 - 4 = -3\frac{1}{2}$

Dus de top is $(-1, -3\frac{1}{2})$.

c $a = 1$ en $b = -8$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = 4$.

$y_{\text{top}} = h(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$

Dus de top is $(4, -16)$.

d $a = -3$ en $b = 0$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{0}{2 \cdot -3} = 0$.

$y_{\text{top}} = k(0) = 4$

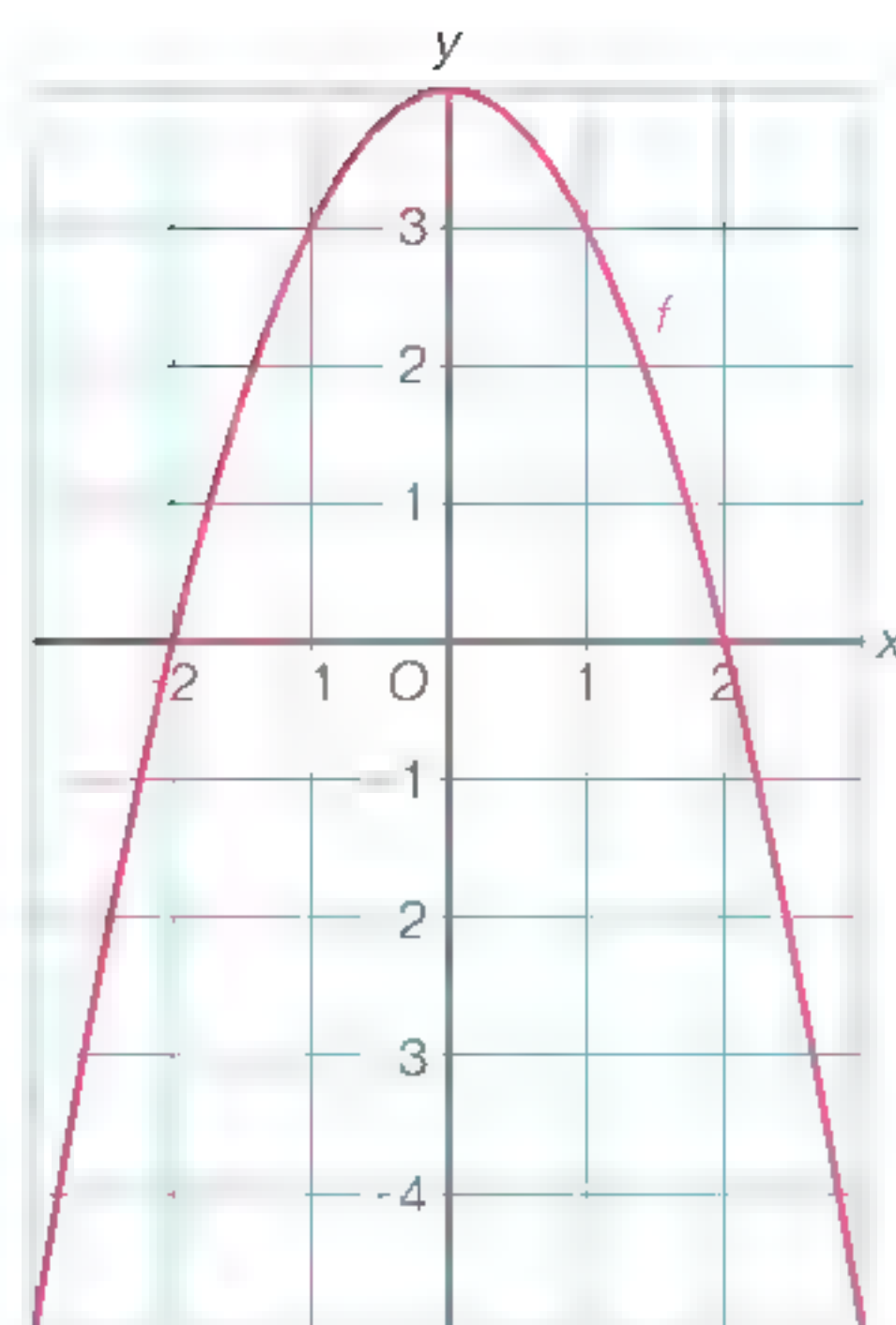
Dus de top is $(0, 4)$.

5 a $a = -1$ en $b = 0$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{0}{2 \cdot -1} = 0$.

b

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	0	3	4	3	0	-5

Zie de grafiek hiernaast.

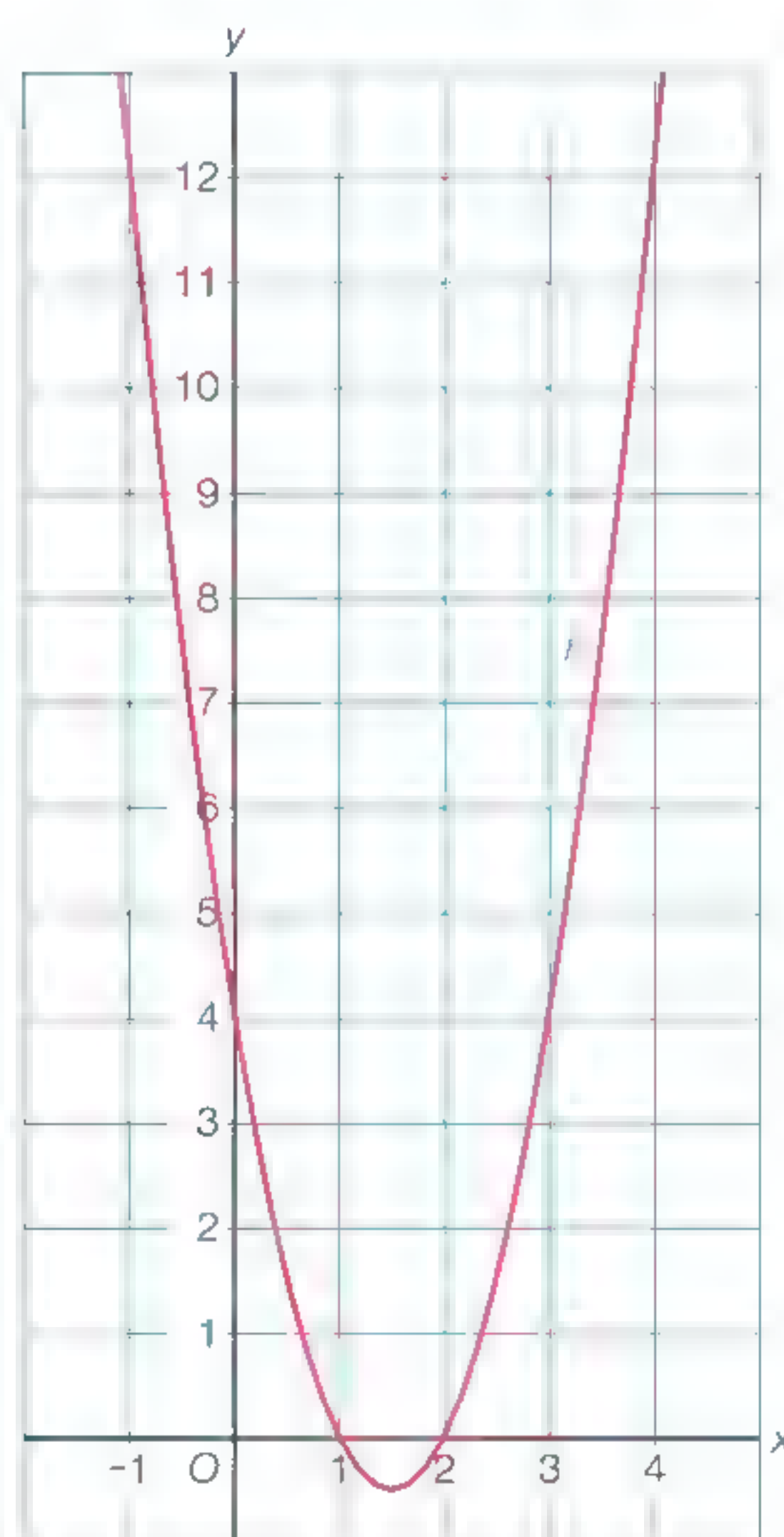


6 a $a = 2$ en $b = -6$, dus $x_{\text{top}} = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1\frac{1}{2}$.

x	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4
$h(x)$	12	4	0	$-\frac{1}{2}$	0	4	12

Zie de grafiek hiernaast.


b $h(-10) = 2 \cdot (-10)^2 - 6 \cdot -10 + 4 = 264$
 Het punt ligt dus op de grafiek van h .




9 [HAVO-B] Kwadratische vormen

9.1 Snijpunten met de x-as en de y-as

Bladzijde 73

 $f(x) = 0$ geeft $x^2 + 5x = 0$
 $x(x + 5) = 0$
 $x = 0 \vee x + 5 = 0$
 $x = 0 \vee x = -5$

De snijpunten met de x-as zijn $(-5, 0)$ en $(0, 0)$.


 $g(x) = 0$ geeft $x^2 - x - 12 = 0$
 $(x + 3)(x - 4) = 0$
 $x + 3 = 0 \vee x - 4 = 0$
 $x = -3 \vee x = 4$

Dus $A(-3, 0)$ en $B(4, 0)$.

$g(0) = -12$, dus $C(0, -12)$.


9.2 De parabool $y = a(x - d)(x - e)$

Bladzijde 74

 **a** $f(-4) = 3(-4 + 4)(-4 - 2) = 3 \cdot 0 \cdot -6 = 0$
 $f(4) = 3(4 + 4)(4 - 2) = 3 \cdot 8 \cdot 2 = 48$
 $f(0) = 3(0 + 4)(0 - 2) = 3 \cdot 4 \cdot -2 = -24$
 $f(2) = 3(2 + 4)(2 - 2) = 3 \cdot 6 \cdot 0 = 0$

b $a = 3$, $d = -4$ en $e = 2$

c $f(x) = 3(x + 4)(x - 2) = 3(x^2 - 2x + 4x - 8) = 3(x^2 + 2x - 8) = 3x^2 + 6x - 24$
Dus $a = 3$, $b = 6$ en $c = -24$.

 **a** $g(-2) = -\frac{1}{2}(-2 + 2)(-2 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2 = 0$
 $g(0) = -\frac{1}{2}(0 + 2)(0 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = -4$
 $g(-4) = -\frac{1}{2}(-4 + 2)(-4 + 4) = -\frac{1}{2} \cdot -2 \cdot 0 = 0$

b $a = -\frac{1}{2}$, $d = -2$ en $e = -4$

c $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 4) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 2x + 8) = -\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 8)$
 $= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4$

Bladzijde 76

a $(7, 0)$ en $(12, 0)$

b $(-19, 0)$ en $(-8, 0)$

c $(-36, 0)$ en $(11, 0)$

d $(0, 0)$ en $(125, 0)$

e $(-160, 0)$ en $(20, 0)$

f $(0, 0)$ en $(116, 0)$

a De snijpunten met de x -as zijn $(6, 0)$ en $(10, 0)$.

$$f(0) = \frac{1}{2}(0 - 6)(0 - 10) = \frac{1}{2} \cdot -6 \cdot -10 = 30$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 30)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{6 + 10}{2} = 8$$

$$y_{\text{top}} = f(8) = \frac{1}{2}(8 - 6)(8 - 10) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot -2 = -2$$

Dus de top is $(8, -2)$.**b** De snijpunten met de x -as zijn $(-5, 0)$ en $(3, 0)$.

$$g(0) = -5(0 + 5)(0 - 3) = -5 \cdot 5 \cdot -3 = 75$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, 75)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

$$y_{\text{top}} = g(-1) = -5(-1 + 5)(-1 - 3) = -5 \cdot 4 \cdot -4 = 80$$

Dus de top is $(-1, 80)$.**c** Snijpunten met de x -as zijn $(-10, 0)$ en $(0, 0)$.De grafiek gaat door $(0, 0)$, dus het snijpunt met de y -as is $(0, 0)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-10 + 0}{2} = -5$$

$$y_{\text{top}} = h(-5) = 6 \cdot -5(-5 + 10) = 6 \cdot -5 \cdot 5 = -150$$

Dus de top is $(-5, -150)$.**d** Snijpunten met de x -as zijn $(-24, 0)$ en $(-16, 0)$.

$$k(0) = -(0 + 16)(0 + 24) = -16 \cdot 24 = -384$$

Dus het snijpunt met de y -as is $(0, -384)$.

$$x_{\text{top}} = \frac{-24 + -16}{2} = -20$$

$$y_{\text{top}} = k(-20) = -(-20 + 16)(-20 + 24) = -1 \cdot -4 \cdot 4 = 16$$

Dus de top is $(-20, 16)$.

a $h(0) = 4 \cdot 0(0 - 6) = 0$

$$h(2) = 4 \cdot 2(2 - 6) = 4 \cdot 2 \cdot -4 = -32$$

$$h(6) = 4 \cdot 6(6 - 6) = 4 \cdot 6 \cdot 0 = 0$$

b $a = 4$, $d = 0$ en $e = 6$

c $h(x) = 4x(x - 6) = 4x^2 - 24x$



a De snijpunten met de x -as zijn $A(-2, 0)$ en $B(5, 0)$.

$$f(0) = -2(0 + 2)(0 - 5) = -2 \cdot 2 \cdot -5 = 20, \text{ dus } C(0, 20).$$

$$x_{\text{top}} = \frac{-2 + 5}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$y_{\text{top}} = f(1\frac{1}{2}) = -2(1\frac{1}{2} + 2)(1\frac{1}{2} - 5) = -2 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot -3\frac{1}{2} = 24\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } T(1\frac{1}{2}, 24\frac{1}{2}).$$

b $y_D = f(4) = -2(4 + 2)(4 - 5) = -2 \cdot 6 \cdot -1 = 12$

c $f(x) = -2(x + 2)(x - 5) = -2(x^2 - 5x + 2x - 10) = -2(x^2 - 3x - 10)$
 $= -2x^2 + 6x + 20$

9.3 Parabolen verschuiven

Bladzijde 77



Als je de rode grafiek 3 omhoog schuift, valt hij samen met de blauwe grafiek.



a $a: y = x^2 + 3$

$b: y = x^2 - 1$

b $p: y = -x^2 + 3$

$q: y = -x^2 - 1$

Bladzijde 78



$g(x) = -3x^2 + 5$

Bladzijde 79



12 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \xrightarrow{5 \text{ naar rechts}} y = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 3$

Dus $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)^2 + 3$.



a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{4 \text{ omhoog}} y = -\frac{1}{4}x^2 + 10$

b $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{2 \text{ omlaag}} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

c $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{1 \text{ naar links}} y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 6$

$y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 6 \xrightarrow{8 \text{ omhoog}} y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 14$

d $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6 \xrightarrow{2 \text{ naar rechts}} y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 6$

$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 6 \xrightarrow{3 \text{ omlaag}} y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 3$

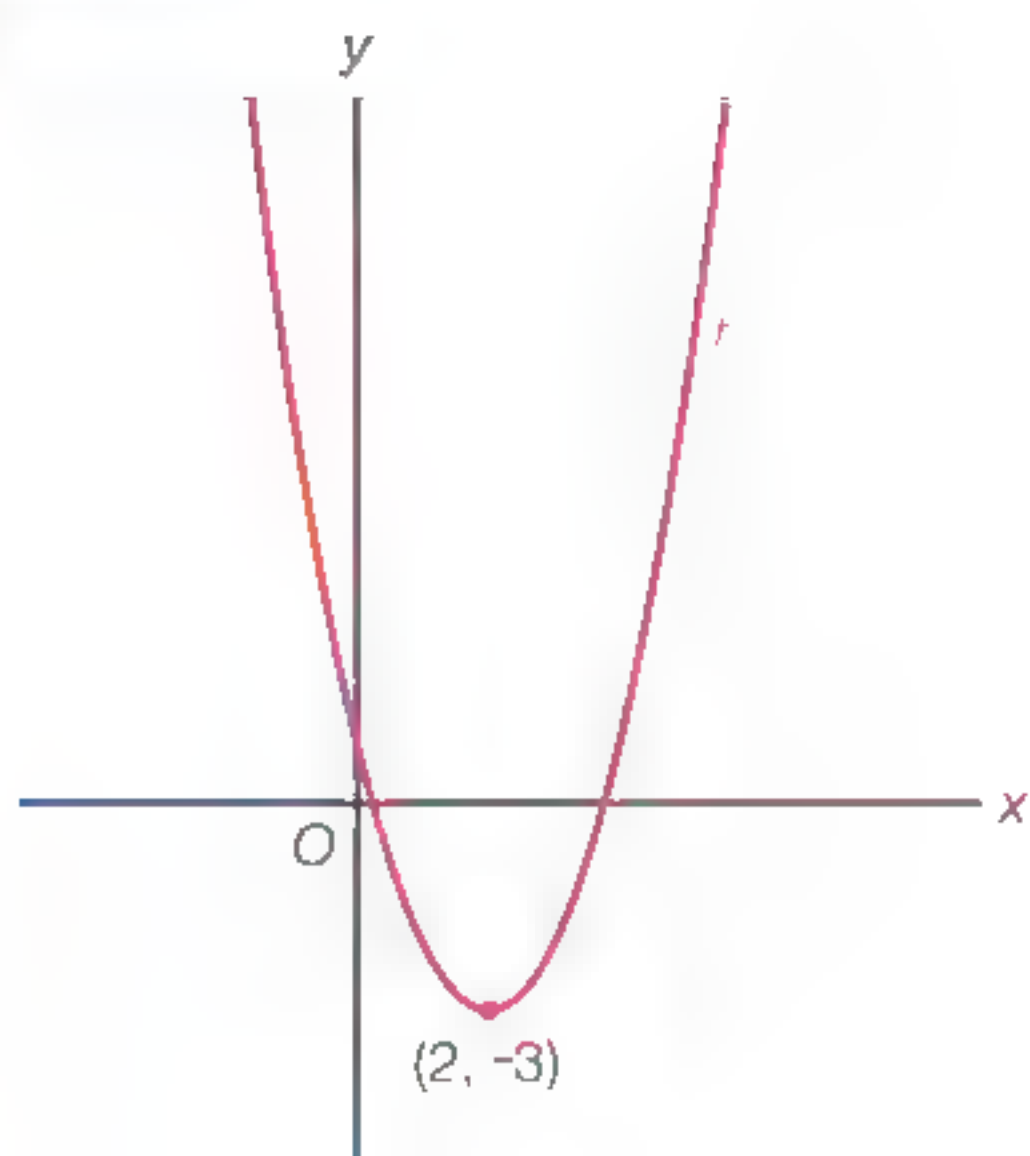


a De grafiek van $f(x) = x^2$ moet 2 naar rechts en 5 omhoog geschoven worden om de grafiek van $g(x) = (x - 2)^2 + 5$ te krijgen.

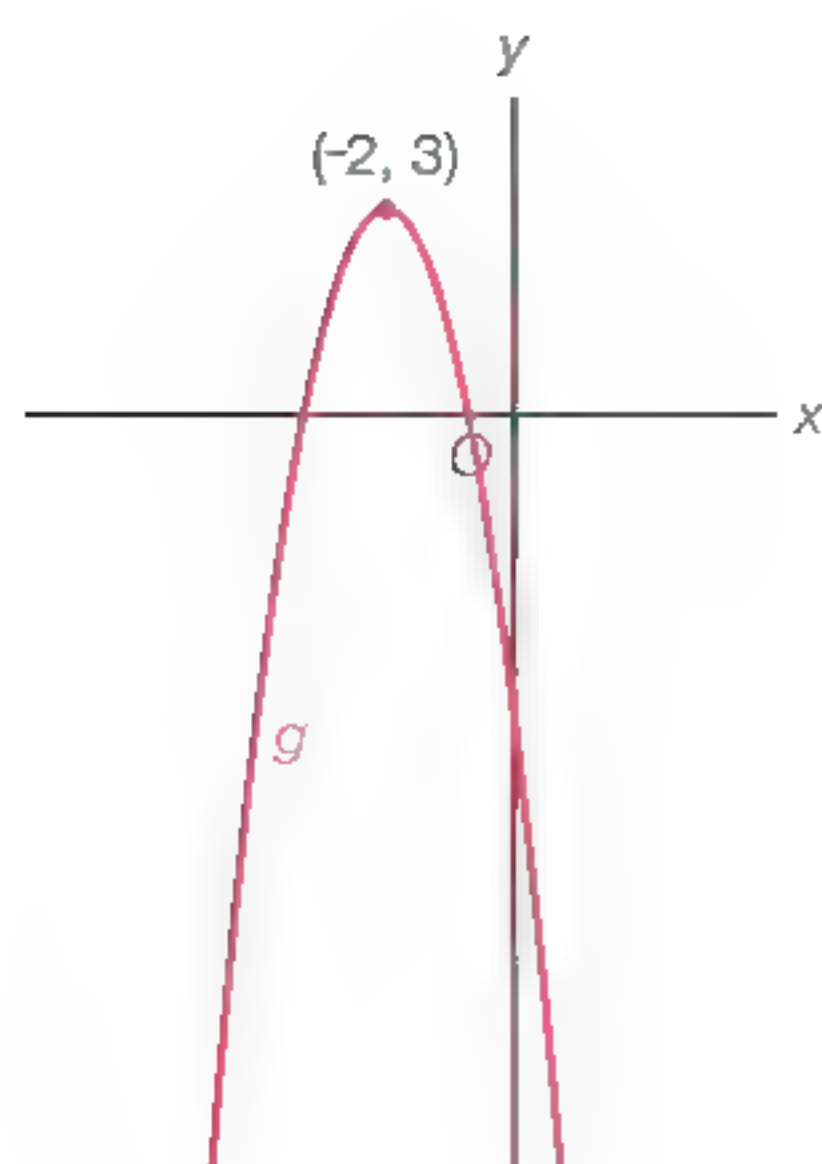
b De grafiek van $h(x) = -2x^2$ moet 3 naar links en 8 omlaag geschoven worden om de grafiek van $k(x) = -2(x + 3)^2 - 8$ te krijgen.

15

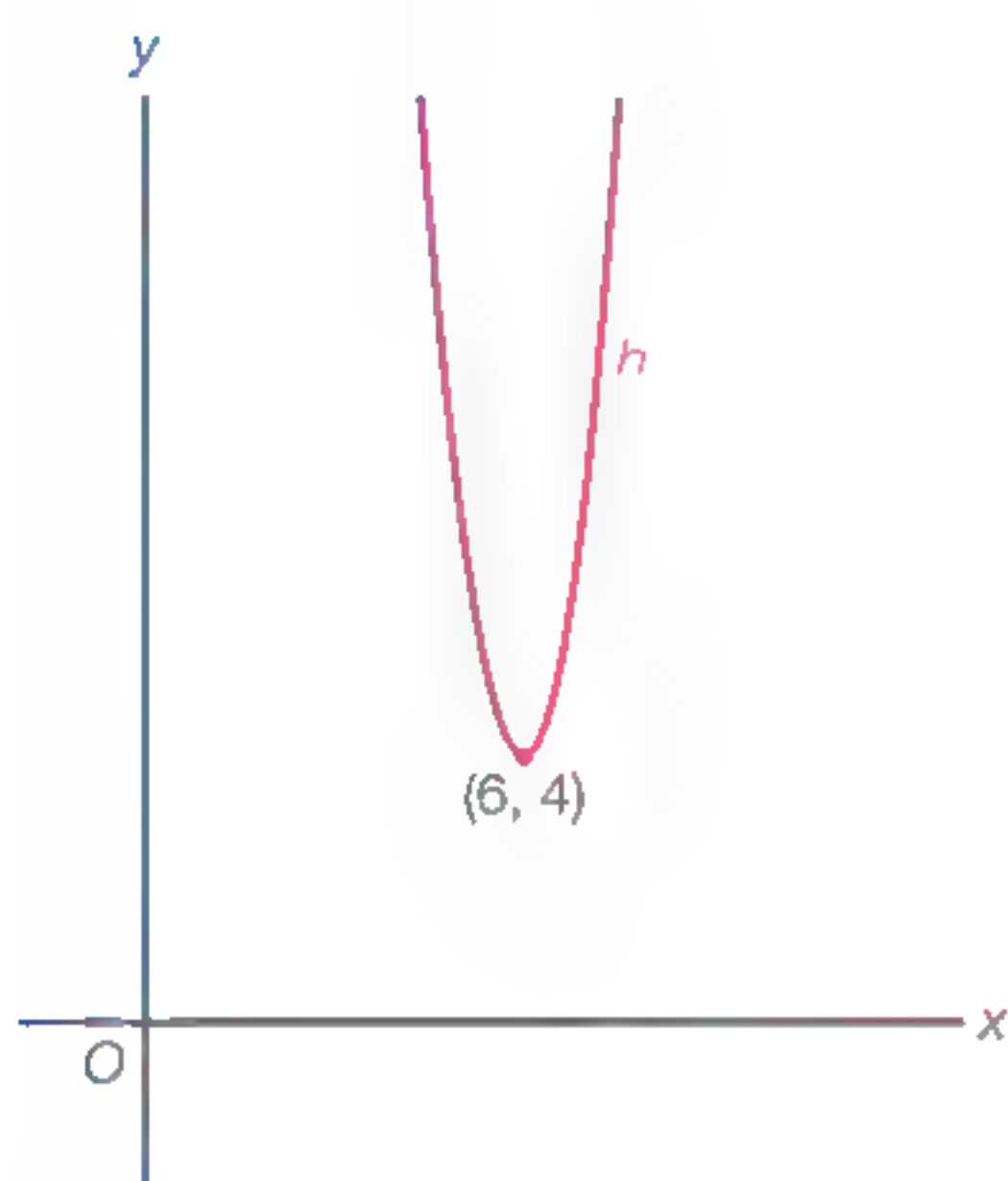
a



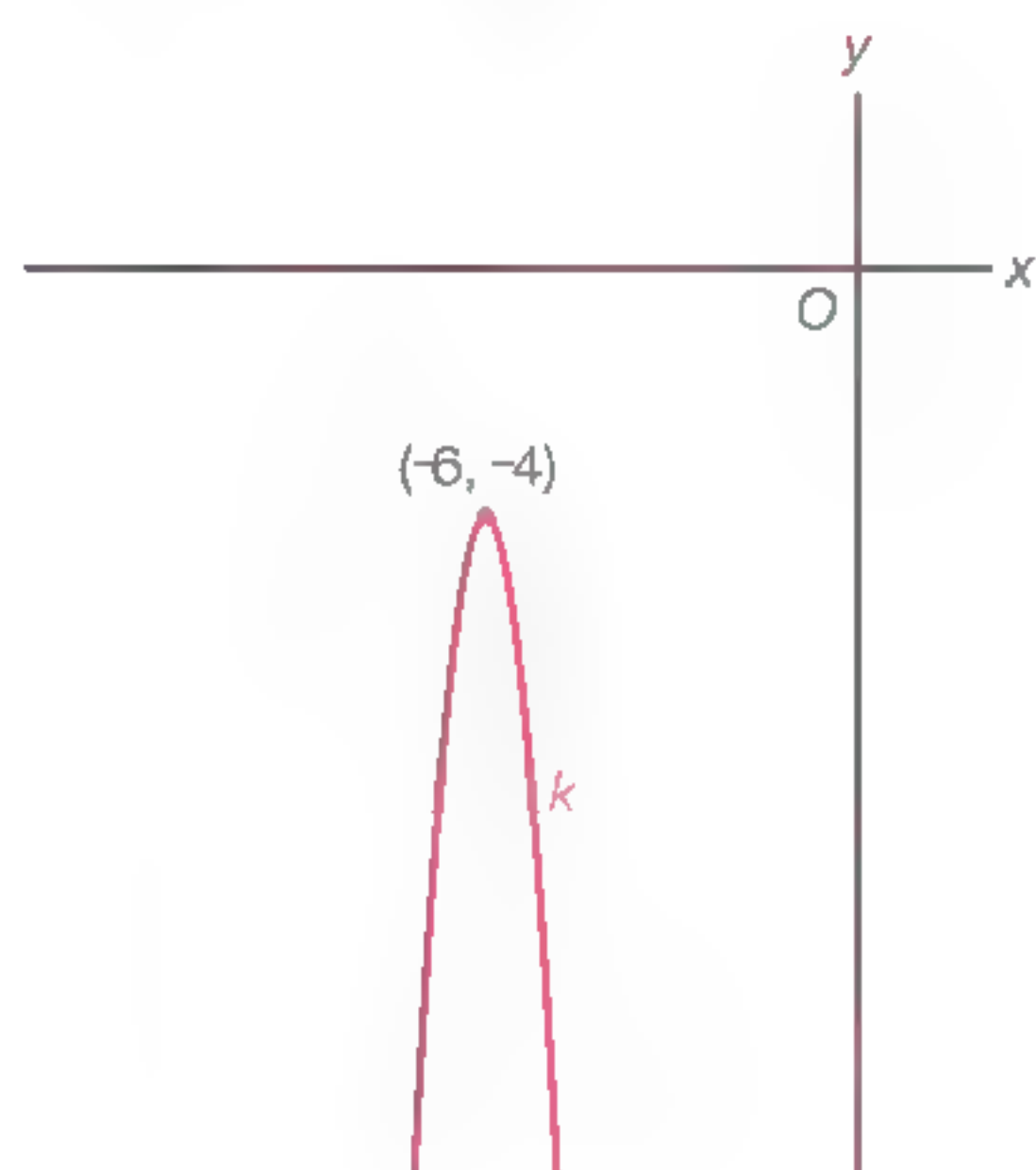
b



c

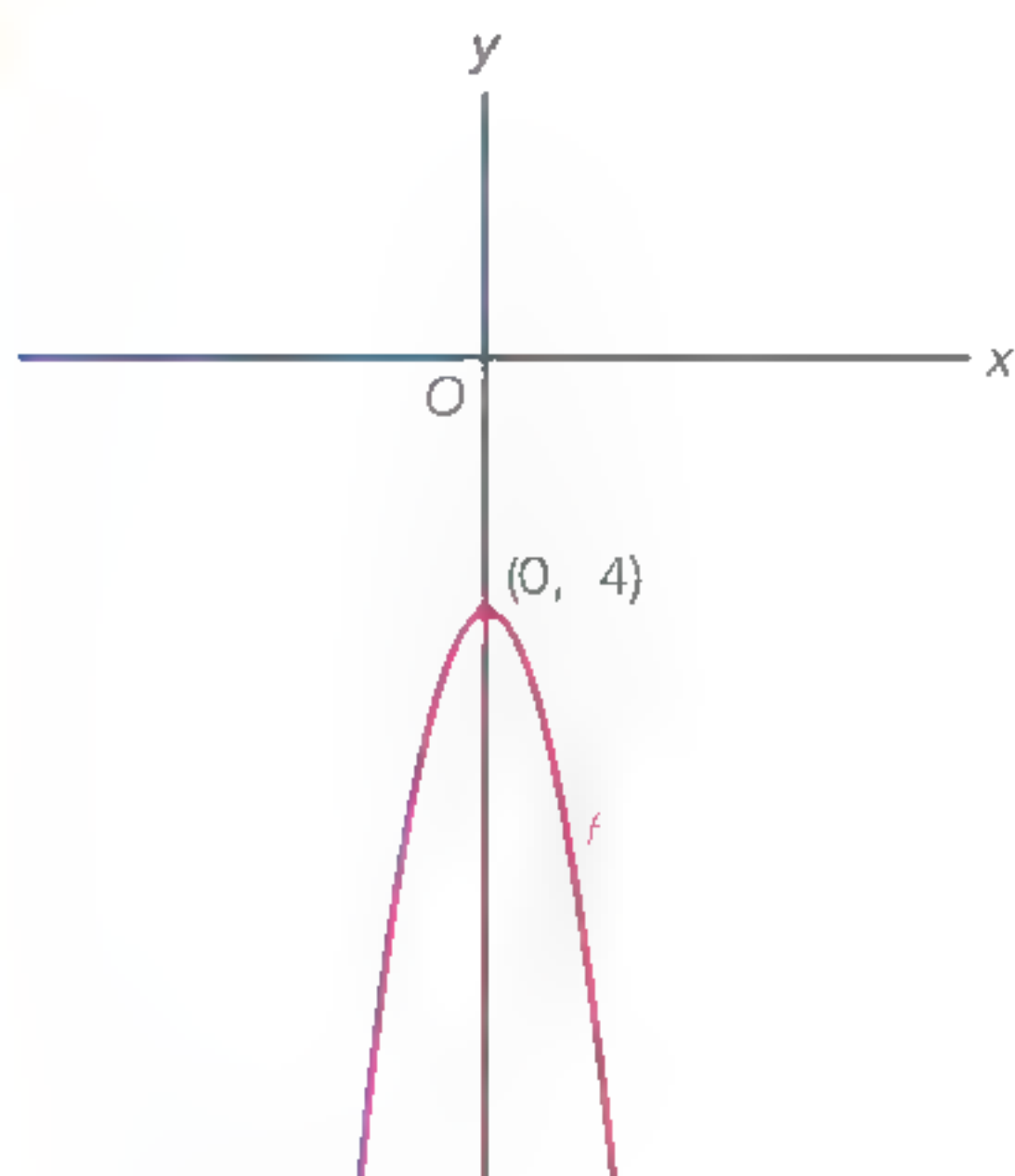


d

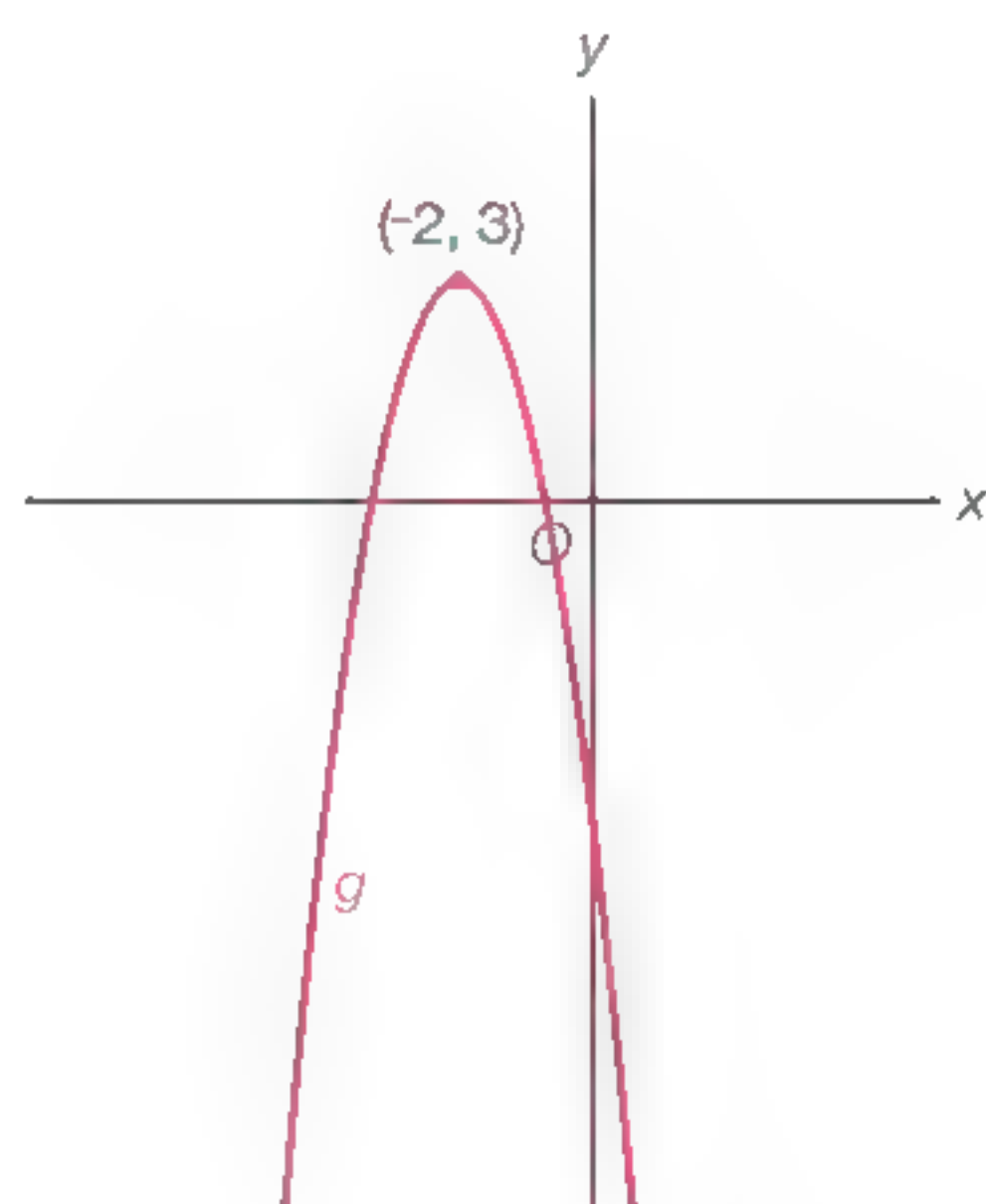


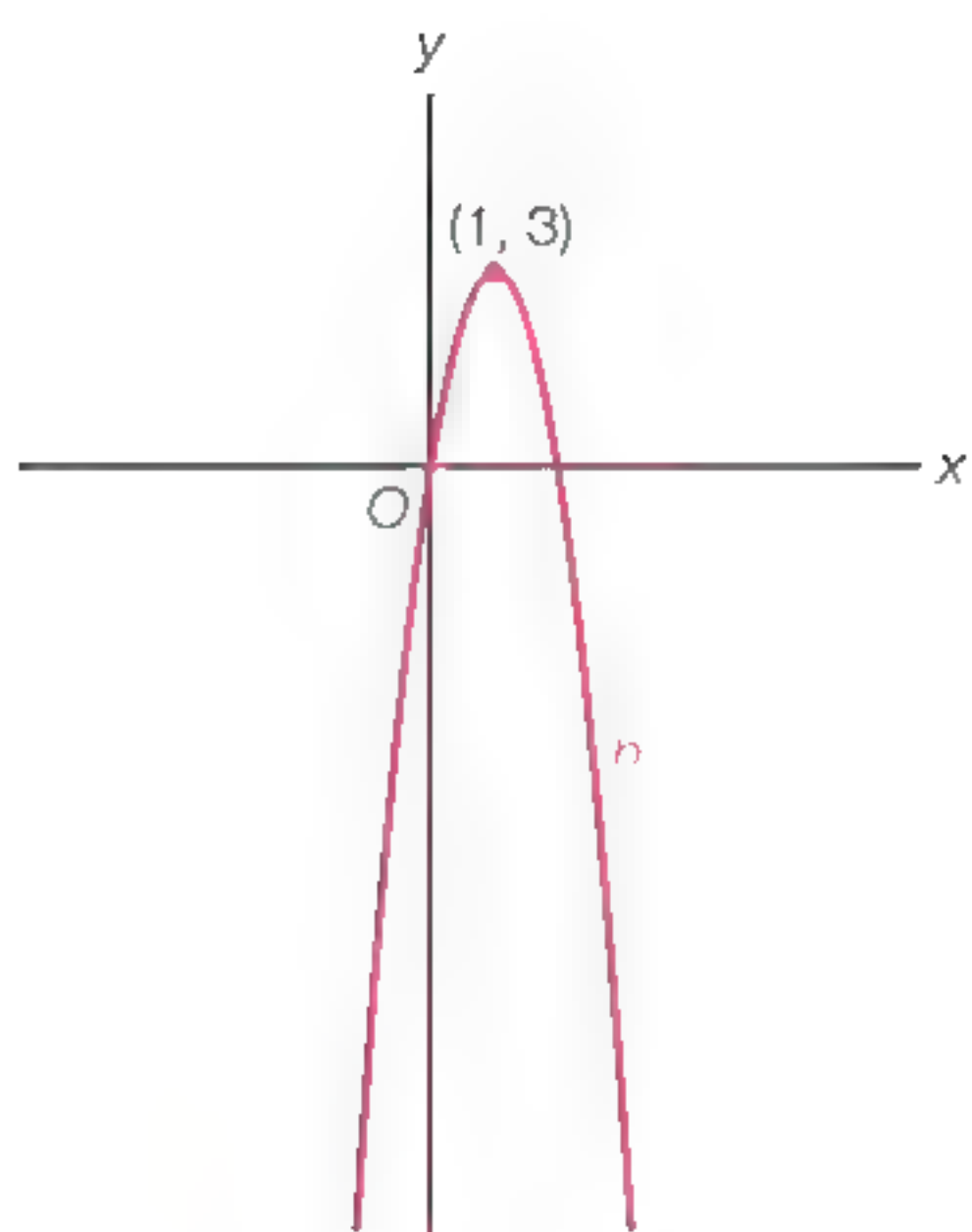
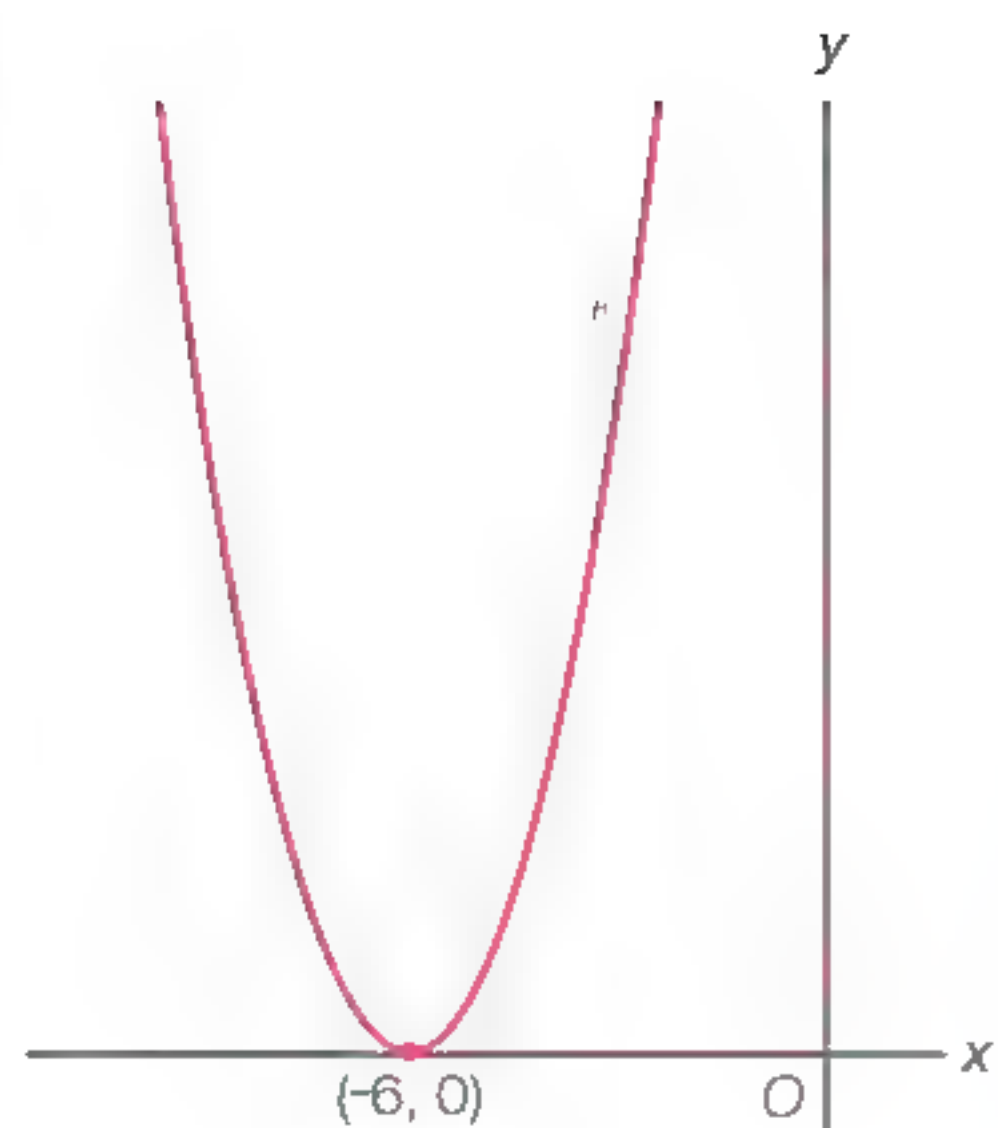
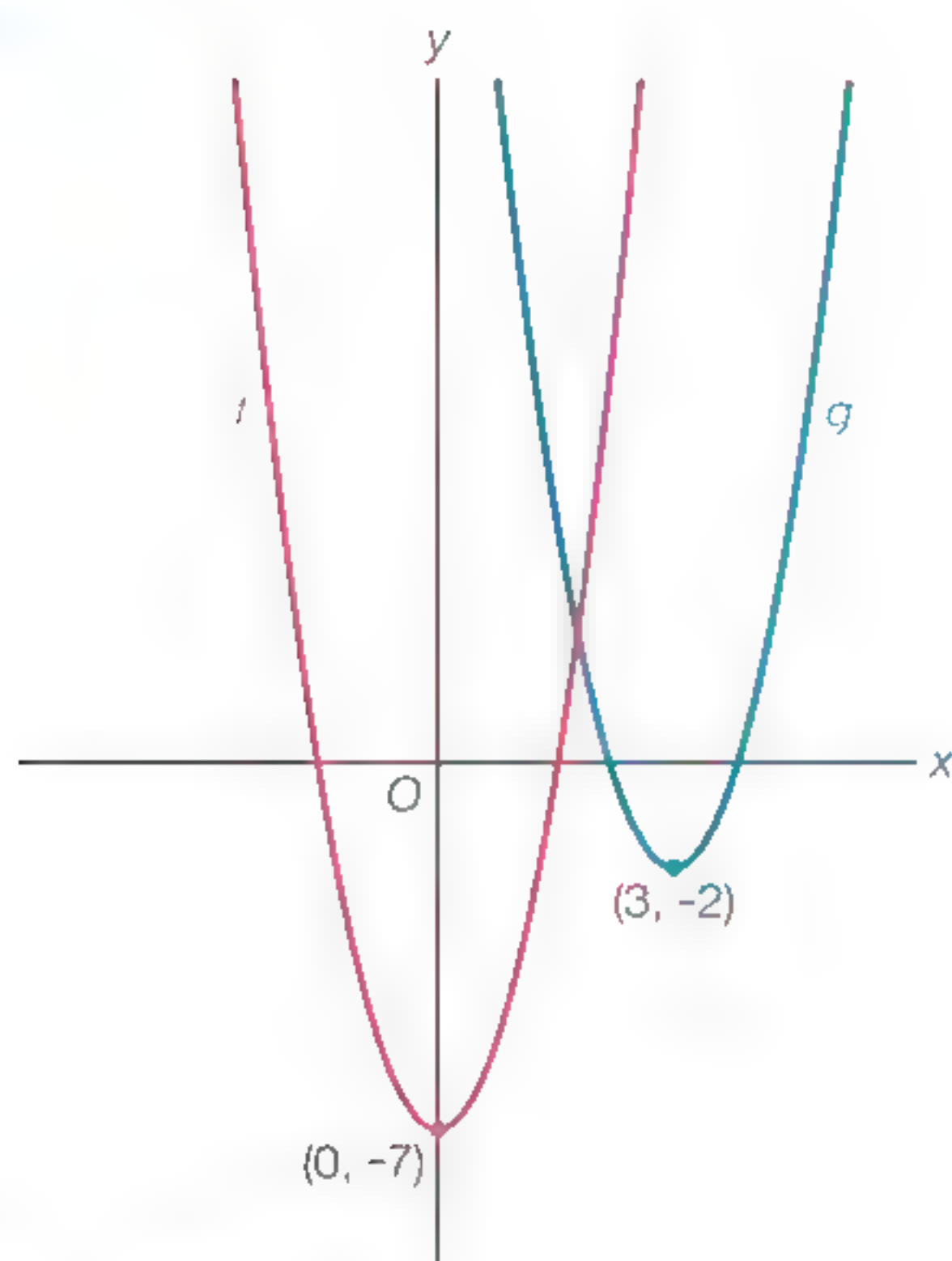
16

a



b



c**d****a, b**

b $g(x) = 3(x - 3)^2 - 2$

10 [MBO] Ruimtemeetkunde

10.1 Pythagoras en doorsnede

Bladzijde 82

a Zie de figuur hiernaast.

b $rhz^2 = 9$

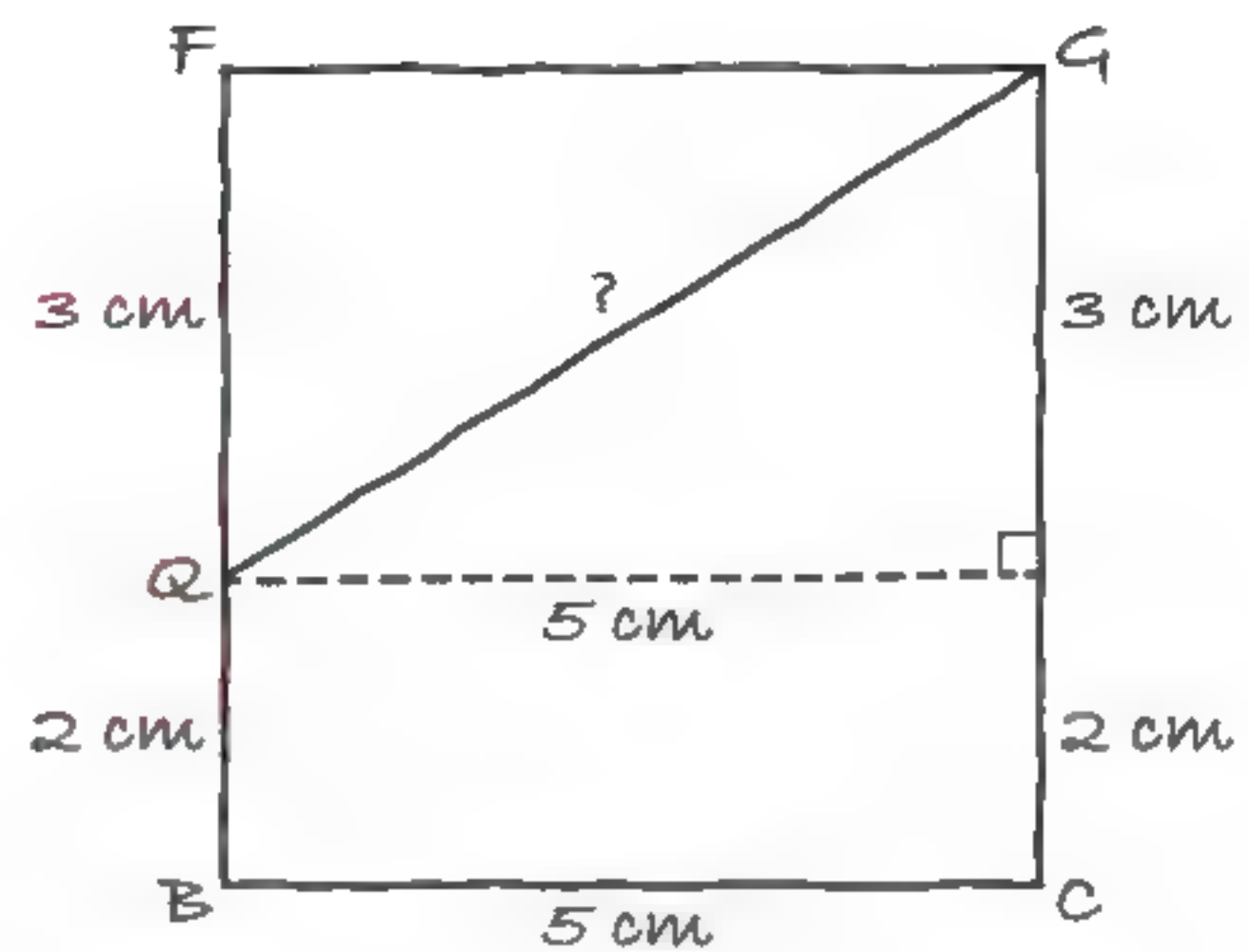
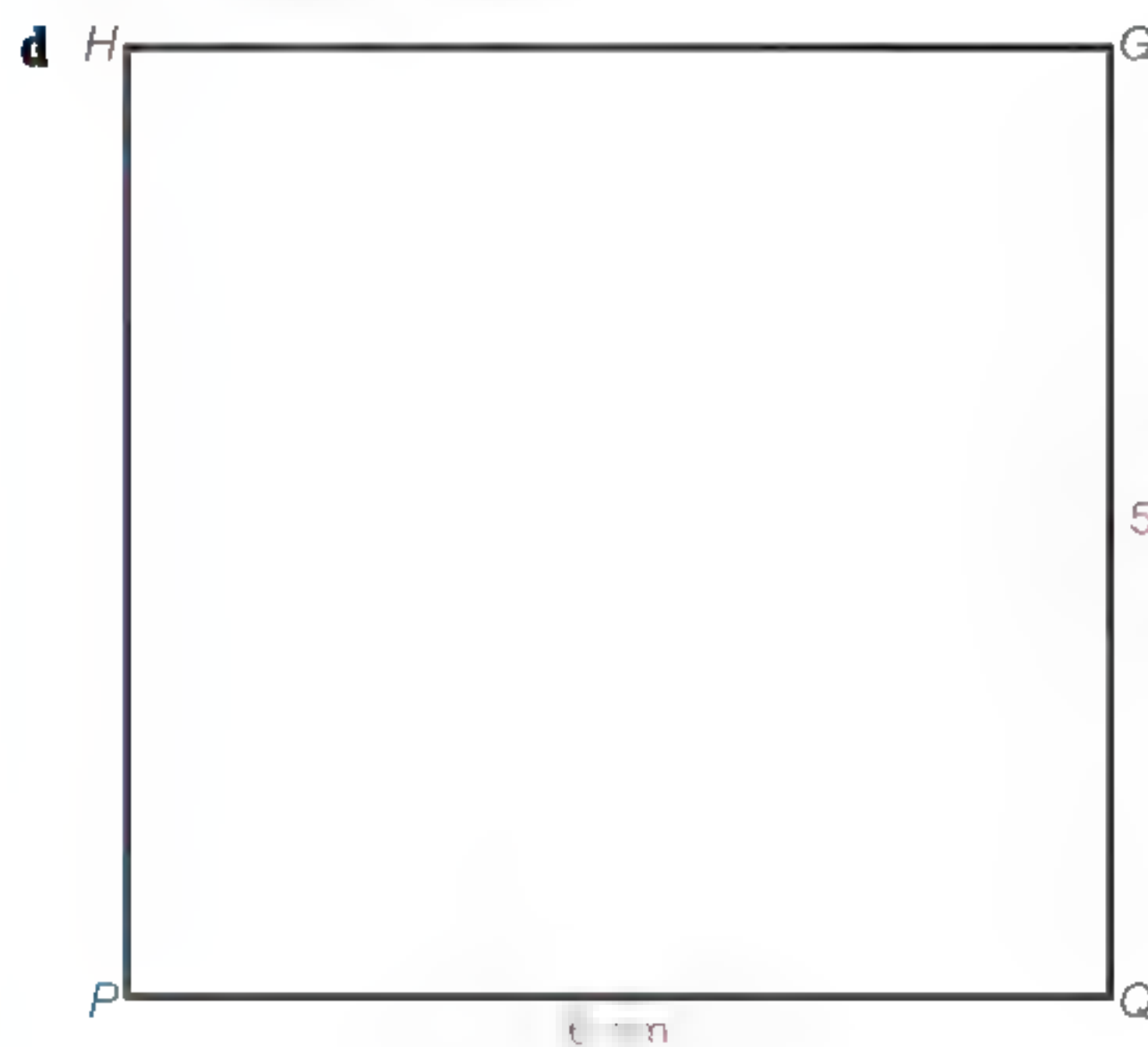
$$\frac{rhz^2 = 25}{+}$$

$? sz^2 = 34$

$sz = \sqrt{34} = 5,830...$

$QG = 5,8 \text{ cm}$

c $PQ = AB = 6 \text{ cm}$



a $rhz^2 = 4$

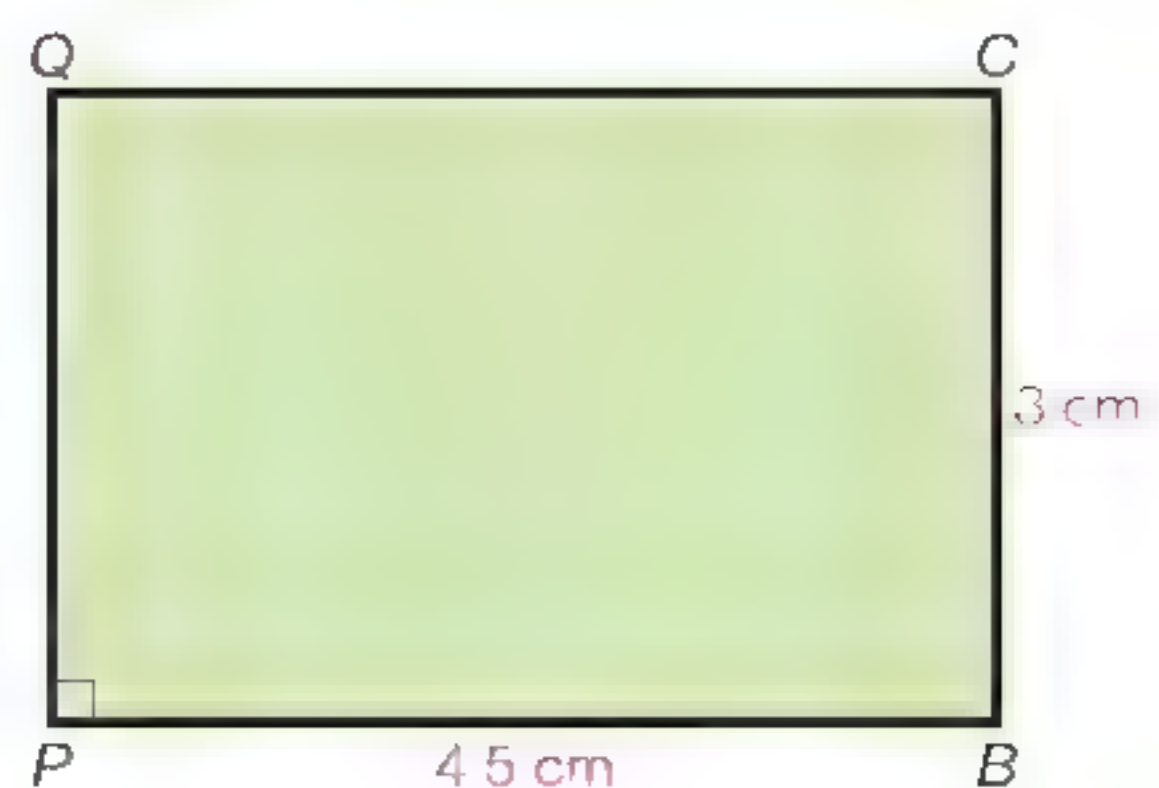
$$\frac{rhz^2 = 16}{+}$$

$? sz^2 = 20$

$sz = \sqrt{20} = 4,472...$

$PB = 4,5 \text{ cm}$

b Zie de figuur hiernaast.





$$rhz^2 = 16$$

$$rhz^2 = 16$$

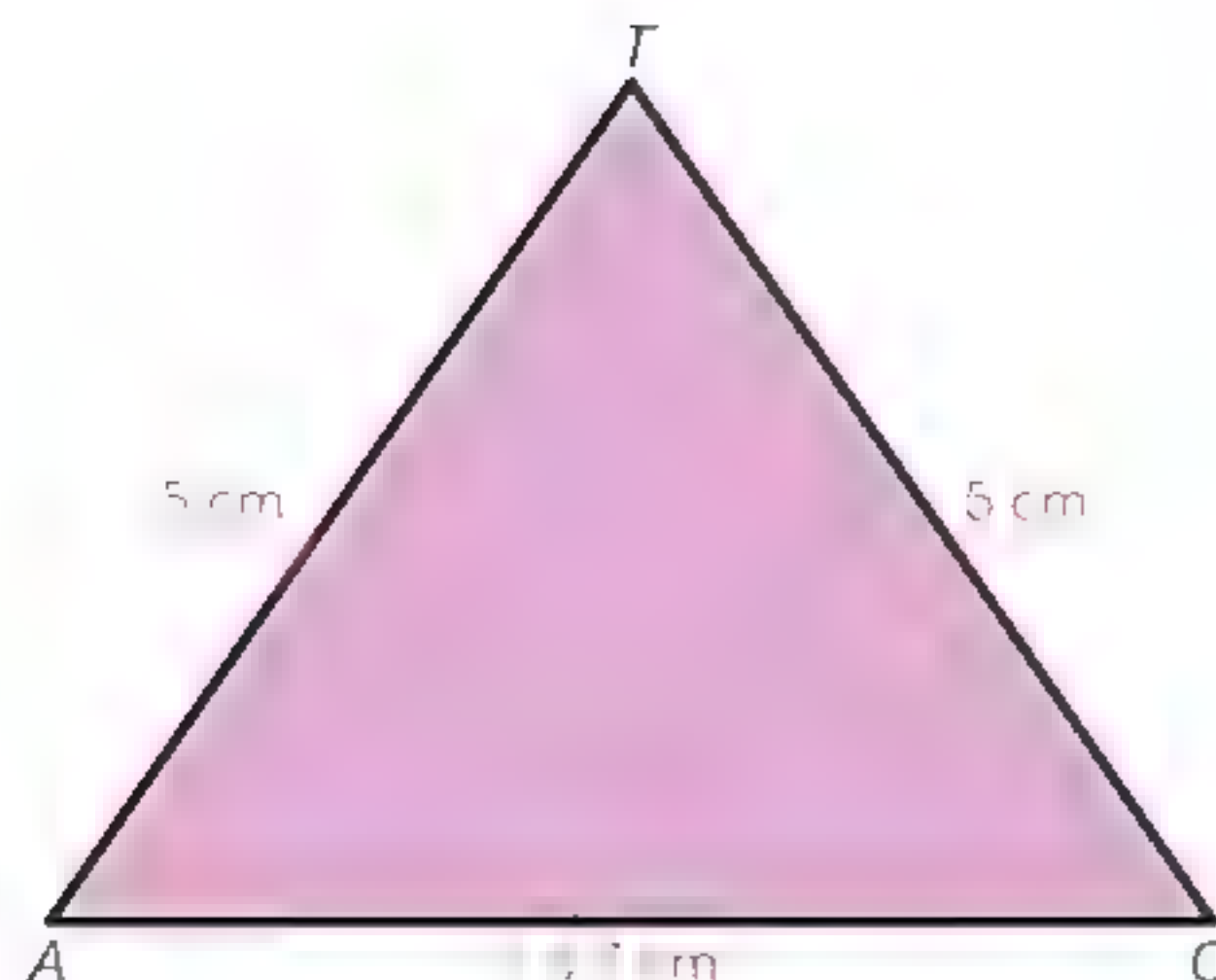
$$\hline +$$

$$? sz^2 = 32$$

$$sz = \sqrt{32} = 5,656...$$

$$AC = 5,7 \text{ cm}$$

Zie de figuur hiernaast.



$$rhz^2 = 20,25$$

$$rhz^2 = 25$$

$$\hline +$$

$$? sz^2 = 45,25$$

$$sz = \sqrt{45,25} = 6,726...$$

$$DP = 6,7 \text{ cm}$$

Zie de figuur hiernaast.



10.2 Berekeningen in de ruimte

Bladzijde 84



a $rhz^2 = 9$

$$rhz^2 = 25$$

$$rhz^2 = 25$$

$$\hline +$$

$$? sz^2 = 59$$

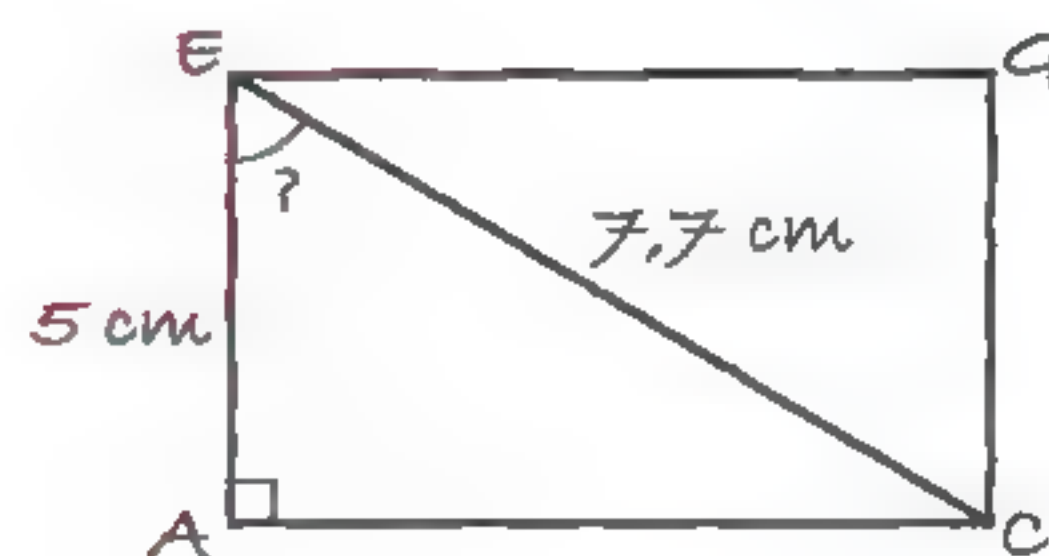
$$sz = \sqrt{59} = 7,681...$$

$$CE = 7,7 \text{ cm}$$

b, c Zie de figuur hiernaast.

d $\cos \angle AEC = \frac{5}{7,7}$

$$\angle AEC = 50^\circ$$



a $rhz^2 = 16$

$$rhz^2 = 36$$

$$rhz^2 = 25$$

$$\hline +$$

$$? sz^2 = 77$$

$$sz = \sqrt{77} = 8,774...$$

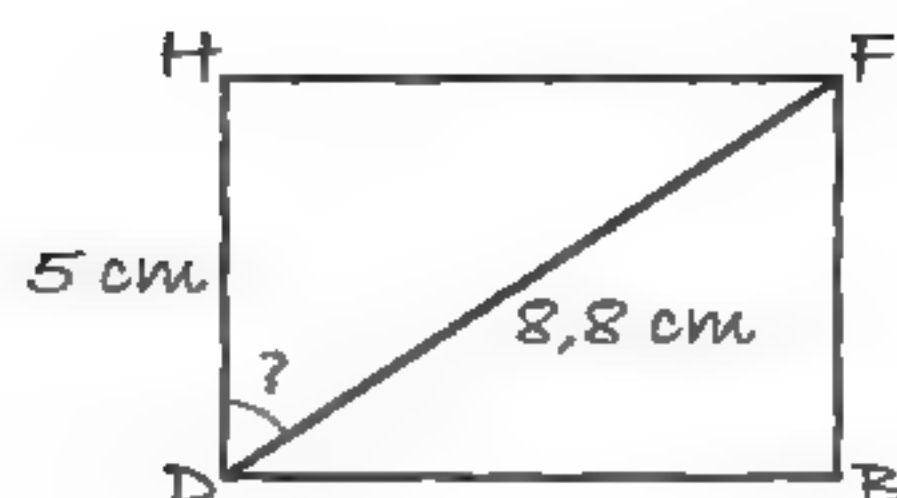
$$DF = 8,8 \text{ cm}$$

b $\angle HDF$ ligt in diagonaalvlak DBFH.

c Zie de figuur hiernaast.

$$\text{d } \cos \angle HDF = \frac{5}{8,8}$$

$$\angle HDF = 55^\circ$$



Bladzijde 85

a $rhz^2 = 25$

$$rhz^2 = 25$$

$$rhz^2 = 25$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 75$$

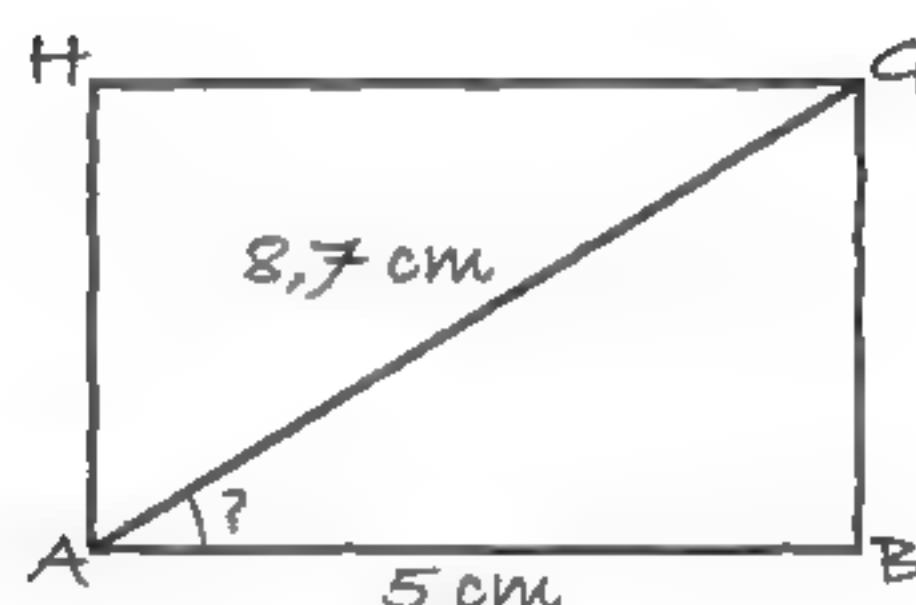
$$sz = \sqrt{75} = 8,660...$$

$$AG = 8,7 \text{ cm}$$

b Zie de schets hiernaast.

$$\cos \angle BAG = \frac{5}{8,7}$$

$$\angle BAG = 55^\circ$$



a $rhz^2 = 16$

$$rhz^2 = 16$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 32$$

$$sz = \sqrt{32} = 5,656...$$

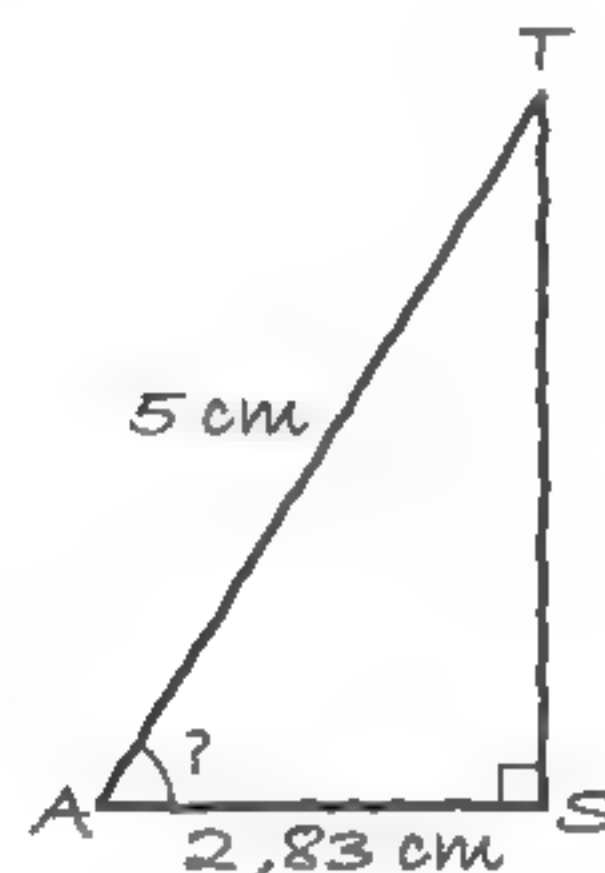
$$AC = 5,66 \text{ cm}$$

$$AS = 5,66 : 2 = 2,83 \text{ cm}$$

b Zie de schets hiernaast.

$$\cos \angle TAS = \frac{2,83}{5}$$

$$\angle TAS = 56^\circ$$



a $rhz^2 = 16$

$$rhz^2 = 36$$

$$rhz^2 = 9$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 61$$

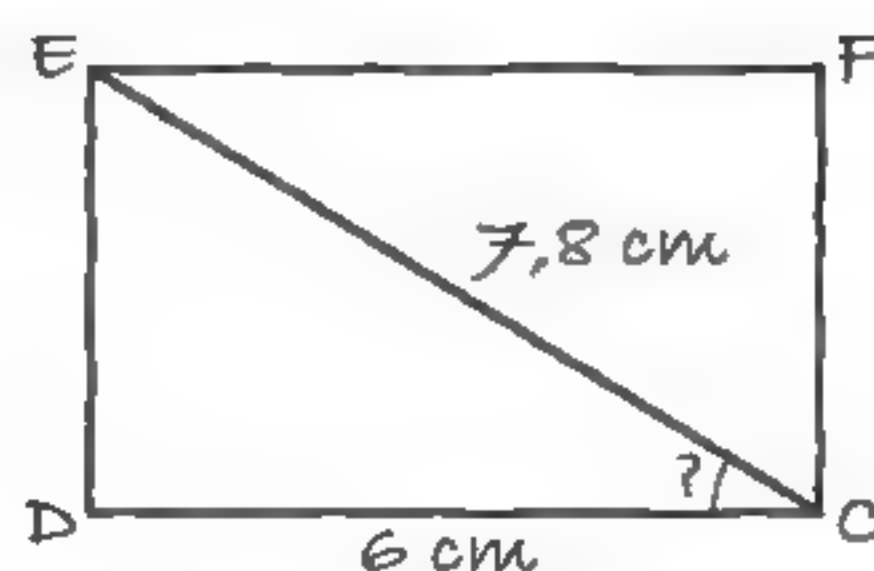
$$sz = \sqrt{61} = 7,810...$$

$$CE = 7,8 \text{ cm}$$

b Zie de schets hiernaast.

$$\cos \angle DCE = \frac{6}{7,8}$$

$$\angle DCE = 40^\circ$$



10

a $rhz^2 = 36$

$$rhz^2 = 36$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 72$$

$$sz = \sqrt{72} = 8,485...$$

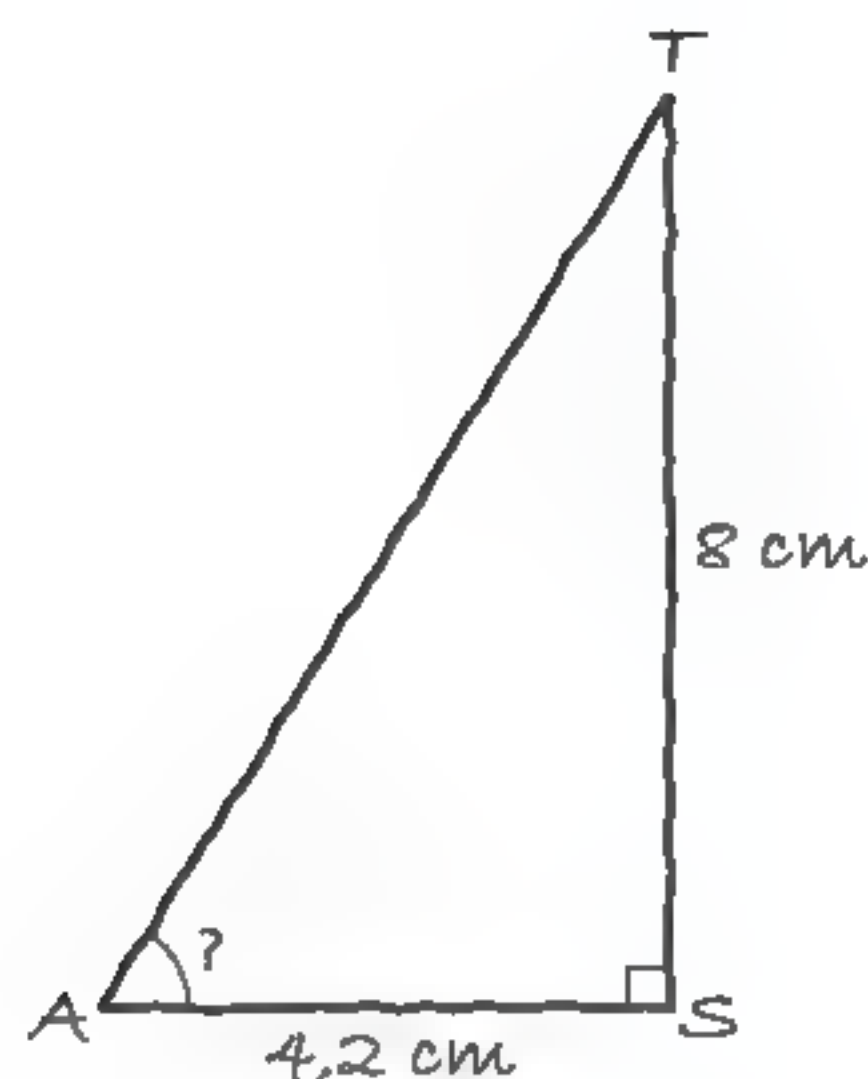
$$AC = 8,49 \text{ cm}$$

$$AS = 8,49 : 2 = 4,2 \text{ cm}$$

b Zie de schets hiernaast.

$$\tan \angle SAT = \frac{8}{4,2}$$

$$\angle SAT = 62^\circ$$



Bladzijde 86

11

a $rhz^2 = 36$

$$rhz^2 = 16$$

$$rhz^2 = 16$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 68$$

$$sz = \sqrt{68} = 8,246...$$

$$BS = 8,2 \text{ cm}$$

b $rhz^2 = 4$

$$rhz^2 = 36$$

$$rhz^2 = 1$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 41$$

$$sz = \sqrt{41} = 6,403...$$

$$RS = 6,4 \text{ cm}$$

10.3 Coördinaten in de ruimte

Bladzijde 88

12

a De namen van de assen zijn: de x -as, de y -as en de z -as.

b Het punt A ligt vanuit de oorsprong 0 in de x -richting, 3 in de y -richting en 2 in de z -richting.

c $B(6, 7, 0)$, $C(5, 0, 3)$, $D(0, 2, 0)$ en $E(0, 0, 7)$

13

a $A(5, 0, 0)$

c $M(0, 2, 3)$

b $C(0, 4, 0)$

d $N(4, 4, 0)$

14

$A(6, 0, 0)$, $B(6, 6, 0)$, $C(0, 6, 0)$, $E(6, 0, 5)$, $F(6, 6, 5)$, $G(0, 6, 5)$ en $H(0, 0, 5)$

15

$P(6, 2, 0)$, $Q(3, 4, 3)$, $R(0, 2, 3)$, $S(6, 2, 3)$ en $T(3, 0, 0)$

Trefwoordenregister

A

abc-formule 67

- oplossen met 67, 68

absolute toename 8

assenstelsel, driedimensionaal 87

$a(b + c) = ab + ac$ 19

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 22

B

breuken 23

- aftrekken 23, 24, 26

- delen 27, 28

- met letters 25

- optellen 23, 24, 26

- vereenvoudigen 23, 25

- vergelijking met 50

- vermenigvuldigen 26, 28

C

coördinaten in de ruimte 87

D

deel naar totaal 12

discriminant 67

doorsnede 81

driedimensionaal assenstelsel 87

drie ribben 86

E

evenwijdig 39

exponent 29

F

factor 14

- buiten haakjes brengen 61

- gemeenschappelijk 60

- voor het wortelteken brengen 56

formule opstellen

- van een evenwijdige lijn 49

- van een lijn 40

- bij een punt op een lijn 48

functie

- kwadratisch 70

- lineair 43

functievoorschrift 43

functiewaarde 43, 70

$f(x) = ax + b$ 44

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 73

$f(x) = a(x - d)(x - e)$ 74, 75

G

gelijke termen, som 14

gelijknamig 23, 24

gelijknamige breuken

- aftrekken 23

- optellen 23

gelijksoortige

- termen 16

- wortels 54

gemeenschappelijke factor 60, 61

goniometrie in de ruimte 83

grondtal 29

H

haakjes wegwerken 19, 20

herleiden 15, 20

horizontaal verschuiven 78

I

invoer 43

K

kwadraat

- van een wortel 53

kwadratische

- vergelijking oplossen 65, 66, 67, 68
- functie 70

L

letterbreuken

- aftrekken 26
- delen 28
- optellen 26
- vereenvoudigen 25
- vermenigvuldigen 28

lichaamsdiagonaal 83

lineair verband 37

lineaire

- formule 37
- functie 43, 44
- ongelijkheid 50
- vergelijking 35
- vergelijking oplossen 36

M

macht

- van een macht 31
- van een product 32

machten

- delen 33
- optellen 30
- vermenigvuldigen 29

merkwaardig product

- $(a + b)(a - b)$ 58
- $(a + b)^2$ 58
- $(a - b)^2$ 58

N

niet-gelijksnamige breuken

- aftrekken 24
- optellen 24

niet-gelijksoortige termen 17

O

omgekeerde 27

ongelijkheid 50

ongelijkheidsteken omklappen 51

ontbinden in factoren 60

oplossen

- kwadratische vergelijking 65
- met *abc*-formule 67

oud berekenen 10

overbrengen termen 35

P

parabool

- horizontaal verschuiven 78
- tekenen 72
- top 71, 79
- verticaal verschuiven 77

percentage 6

procent 4, 6

procentuele

- afname 5, 8, 10
- toename 5, 8, 10
- verandering 8

product 14, 15, 60

product is nul 64

product-som-methode 62

punt op een lijn 48

Pythagoras

- doorsnede 81
- in de ruimte 83
- verlengde stelling 83, 86

R

richtingscoëfficiënt 38

S

snijpunt berekenen 42, 46, 73

som 16 60

T

termen 14

- gelijksoortig 16

- niet-gelijksoortig 17

- overbrengen 35

toename

- absoluut 8

top parabool 71, 79

tweeterm 22

U

uitvoer 43

V

variabele 35

vereenvoudigen 23, 25

vergelijking

- met breuken 50

- kwadratisch 65

- lineair 35

vermenigvuldigingsfactor 4, 5

verschuiven

- grafiek horizontaal 78

- grafiek verticaal 77

W

wortel

- gelijksoortig 54

- kwadraat van 53

- som van 54

- vermenigvuldigen 55

Y

$y = ax + b$ 38

$y = a(x - p)^2 + q$ 79

Verantwoording

Beeld

Illustraties: Richard van de Pol, Tilburg; Haasart, Wim de Haas, Rhenen

Technisch tekenwerk: Integra Software Services, India

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl. De informatie in deze uitgave is uitsluitend bedoeld als algemene informatie. Aan deze informatie kunt u geen rechten of aansprakelijkheid van de auteur(s), redactie of uitgever ontleen.

Colofon

Omslagontwerp: InOntwerp, Assen

Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers grafisch ontwerp, Sappemeer

Lay-out: Integra Software Services

Klimaatneutraal

Noordhoff vindt jouw toekomst belangrijk en daarom hebben wij dit boek klimaatneutraal geproduceerd.



0 / 21

© 2021 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Utrecht, The Netherlands

Deze uitgave is beschermd op grond van het auteursrecht. Wanneer u (her)gebruik wilt maken van de informatie in deze uitgave, dient u vooraf schriftelijke toestemming te verkrijgen van Noordhoff Uitgevers bv. Meer informatie over collectieve regelingen voor het onderwijs is te vinden op www.onderwijsenauteursrecht.nl.

This publication is protected by copyright. Prior written permission of Noordhoff Uitgevers bv is required to (re)use the information in this publication.

ISBN 978-90-01-74538-7

Met FLEX heb je:

Boeken die je mag houden

- elk schooljaar krijg je een nieuw boek
- dit boek mag je houden om in te markeren en te werken
- zo wordt je boek een effectief leermiddel

Een persoonlijke digitale leeromgeving

- waarin je wordt uitgedaagd om het beste uit jezelf te halen
- met oefentoetsen, interactieve opdrachten en feedback
- en met inzicht in je resultaten

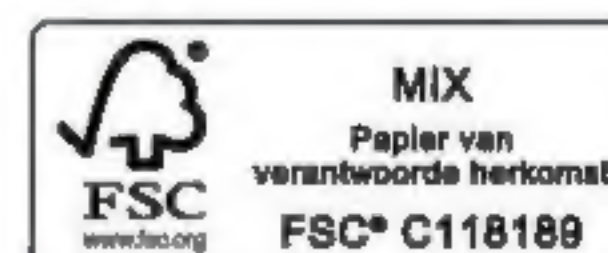


Altijd actueel lesmateriaal

- actuele inhoud met opdrachten en toetsen
- zowel in je boek als digitaal
- aangevuld met nieuw lesmateriaal op basis van het nieuws en actualiteiten



Noordhoff



www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-74538-7



9 789001 745387